1. BC의 중점이 M인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 있다. $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$, $\overline{\mathrm{AM}}=2$일 때, $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{13}$

해설

중선정리를 이용하면

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2\left(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2\right)$이므로

$5^2+3^2=2(\overline{\mathrm{BM}}^2+2^2)$

$\therefore \overline{\mathrm{BM}}^2=13$

$\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{BM}}=2\sqrt{13}$

2. $\triangle$ABC의 두 꼭짓점이 $\mathrm{A}(0,1), \mathrm{B}(2,0)$이고 무게중심이 $\mathrm{G}(2,1)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $(-1,2)$ ② $(1,0)$ ③ $(2,1)$

④ $(3,2)$ ⑤ $(4,2)$

해설

꼭짓점 C의 좌표를 (a,b)라 하면
$\triangle$ABC의 두 꼭짓점이 $\mathrm{A}(0,1), \mathrm{B}(2,0)$이고
무게중심이 $\mathrm{G}(2,1)$이므로

$$\frac{0+2+a}{3}=2, \frac{1+0+b}{3}=1$$

$\therefore a=4, b=2$

$\therefore \mathrm{C}\,(4,2)$

3. 다음 중 점 $(2,\ -4)$ 를 지나고, 기울기가 -3 인 직선 위에 있는 점은?

① $(-2,\ 5)$ ② $(-1,\ 3)$ ③ $(1,\ 2)$

④ $(3,\ -8)$ ⑤ $(4,\ -10)$

해설

점 $(2,\ -4)$ 를 지나고
기울기가 -3 인 직선의 방정식은 $y+4=-3(x-2)$
$\therefore y=-3x+2$
따라서, 직선 $y=-3x+2$ 위의 점은
$(4,\ -10)$ 이다.

4. $m>0$ 이고, 두 점 $(m,\ 3)$, $(1,\ m)$ 이 기울기가 m 인 직선 위에 있을 때, m 은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

해설

기울기$=\dfrac{m-3}{1-m}=m$, $m^2=3$

$\therefore m=\sqrt{3}(\because m>0)$

5. 점 $(1, 2)$ 를 지나고, x 축에 평행한 직선의 방정식을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : $y = 2$

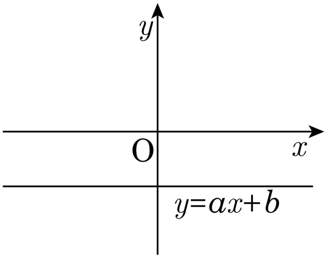
해설

점 $(1,\ 2)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선이므로

$\therefore\ y = 2$

6. 다음 그림과 같이 $y = ax + b$의 그래프가 x축에 평행인 직선일 때, $y = bx + a - 2$의 그래프가 반드시 지나는 사분면을 모두 고르면?

㉠ 제1사분면	㉡ 제2사분면
㉢ 제3사분면	㉣ 제4사분면

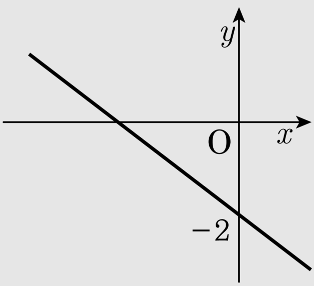


① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉡, ㉢

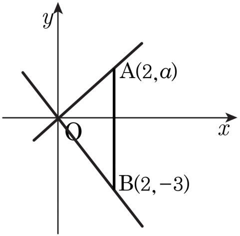
④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

주어진 직선 $y = ax + b$의 그래프가
x축과 평행하면서 x축 아래쪽에
놓여 있으므로 $a = 0,\ b < 0$이다.
이 때, $y = bx + a - 2$에서
기울기 : $b < 0$, y절편 : $a - 2 = -2 < 0$이므로
직선 $y = bx = a - 2$의 그래프는
다음 그림과 같다.
따라서 이 직선의 그래프가 반드시 지나는
사분면은 제 2, 3, 4사분면이다.



7. 다음 그림과 같이 원점과 점 A$(2,\ a)$ 를 지나는 직선의 기울기를 m_1, 원점과 점 B$(2,\ -3)$ 을 지나는 직선의 기울기를 m_2 라 하자. $m_1 \times m_2 = -1$ 일 때, a 의 값을 구하면?



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$m_1 = \frac{a}{2},\ m_2 = -\frac{3}{2}$

$m_1 \times m_2 = \frac{a}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$ 이므로,

$\therefore\ a = \frac{4}{3}$

8. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3,\ 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

9. 점 $(1,\ -2)$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는?

① $(-1,\ -1)$ ② $(-1,\ -3)$ ③ $(3,\ -1)$

④ $(3,\ -3)$ ⑤ $(3,\ 5)$

해설

$(x, y) \ \rightarrow \ (x+2, y-1)$이므로

$(1, -2) \ \rightarrow \ (1+2, -2-1) = (3, -3)$

10. A $(4, 7)$, B $(3, 2)$, C $(5, 3)$, D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $y - x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$\therefore \quad x + 3 = 9,\ y + 2 = 10$

$\therefore \quad x = 6,\ y = 8$

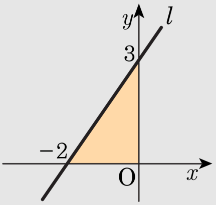
11. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x - 2y + 6 = 0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$

12. 세 점 $A(-2, 9)$, $B(3, -1)$, $C(5, a)$가 일직선 위에 있을 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① -6 ② -5 ③ 2 ④ 9 ⑤ 13

해설

일직선 위에 있으려면 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 기울기가 같다.

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\dfrac{9-(-1)}{-2-3} = -2$ 이고

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\dfrac{a-(-1)}{5-3}$ 이다.

$\therefore \quad a = -5$

13. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0, 0),\ (2, 6),\ (6, 3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$$\frac{1}{2}|2 \cdot 3 - 6 \cdot 6| = 15$$

14. 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 방정식의 반지름의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

원이 점 $(2,\ 1)$ 을 지나고 x 축, y 축에 접하면
제 1 사분면에 위치하므로 반지름이 r 이면
중심이 $(r,\ r)$ 이다.
$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ 이고
또한 $(2,\ 1)$ 을 지나므로
$(2-r)^2+(1-r)^2=r^2$,
$(r-1)(r-5)=0$
$\therefore\ r=1$ 또는 5
$\therefore\ (x-1)^2+(y-1)^2=1$ 또는 $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$
$\therefore 1+5=6$

15. 두 점 $A(-1,\ 0), B(2,\ 0)$ 으로부터 거리의 비가 $2:1$ 인 점 P 의 자취는 어떤 원을 나타낸다. 이 때, 이 원의 반지름의 길이는?

① $\frac{3}{2}$　　② 2　　③ $\frac{5}{2}$　　④ 3　　⑤ 4

해설

조건을 만족시키는 점 P 의 좌표를 $P(x, y)$ 라 하면

$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$

$2\overline{BP} = \overline{AP}$

$\therefore\ 4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$

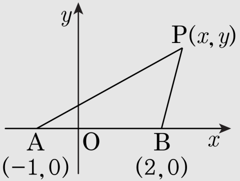
그런데 $\overline{AP} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$

$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

$4\left\{(x-2)^2 + y^2\right\} = \left\{(x+1)^2 + y^2\right\}$

정리하면 $(x-3)^2 + y^2 = 4$

따라서 원의 반지름은 2 이다.



16. 다음 원 $x^2+y^2=9$ 와 직선 $y=x+5$ 의 교점의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ________ 개

▷ **정답 :** 0 개

해설

원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면,

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}>3$$

반지름보다 크므로 원과 직선은 만나지 않는다.

17. 기울기가 -1 이고, 원 $x^2+y^2=4$ 에 접하는 직선의 방정식은?

① $y=-x\pm 2$ ② $y=-x\pm 3$ ③ $y=-x\pm 4$

④ $y=-x\pm 2\sqrt{2}$ ⑤ $y=-x\pm 4\sqrt{2}$

해설

구하는 직선의 기울기는 -1 이므로

$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$ 에서

$y=-x\pm 2\sqrt{1+1}$

$\therefore\ y=-x\pm 2\sqrt{2}$

18. 원 $x^2+(y+1)^2=4$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 후, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

원 $x^2+(y+1)^2=4$ 를 x 축의 방향으로
3 만큼 평행이동하면 $(x-3)^2+(y+1)^2=4$
이 원을 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동하면
$(y-3)^2+(x+1)^2=4$,
$\therefore\ (x+1)^2+(y-3)^2=4$ 이
$(x-a)^2+(y-b)^2=4$ 와 일치하므로
$a=-1$, $b=3$
$\therefore\ a+b=2$

19. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(2,\ 4)$, $\mathrm{C}(a,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이 되도록 하는 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2}$

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}$

$2 - 2a + a^2 = 20 - 4a + a^2$

$2a = 18$

$\therefore\ a = 9$

20. 다음은 $\triangle ABC$의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 보인 것이다.

> 직선 BC를 x축, 변 BC의 수직이등분선을 y축으로 잡고, $A(a,\ b)$, $B(-c,\ 0)$, $C(c,\ 0)$라고 하자. (단, $b \neq 0$, $c > 0$)
>
> (i) $a \neq c$이고 $a \neq -c$일 때 직선 AC의 기울기는 $\dfrac{b}{a-c}$이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은
>
> $$y = \boxed{\text{(가)}}\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$$
> $$= \boxed{\text{(가)}}\,x + \boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots ㉠$$
>
> 같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은
>
> $$y = -\frac{a+c}{b}x + \boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots ㉡$$
>
> 두 직선 ㉠, ㉡의 y절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y축 위의 점 $\left(0,\ \boxed{\text{(나)}}\right)$에서 만난다. 따라서 $\triangle ABC$의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
>
> (ii) $a = c$ 또는 $a = -c$일 때
>
> $\triangle ABC$는 $\boxed{\text{(다)}}$이므로 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
>
> 따라서 $\triangle ABC$의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

② $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 정삼각형

③ $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

④ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

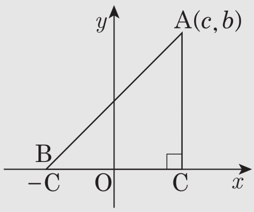
⑤ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

해설

직선 AC의 기울기가 $\dfrac{b}{a-c}$이므로

변 AC에 수직인 직선의 기울기를 m이라 하면 $\dfrac{b}{a-c}\cdot m = -1$에서 $m = -\dfrac{a-c}{b}$

이다.



이때, 중점 $E\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$이므로 변 AC에 수직인 직선의 방정식은

$$y = \left[-\frac{a-c}{b}\right]\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$$
$$= -\frac{a-c}{b}x + \frac{a^2-c^2}{2b} + \frac{b}{2}$$
$$= \left[-\frac{a-c}{b}\right]x + \left[\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}\right]$$

즉, (가), (나)에 들어갈 것은 차례로 $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$이다.

한편, $a = c$ 또는 $a = -c$일 때는 다음 그림에서 보면 $\triangle ABC$는 직각삼각형이다.

21. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$을 지나는 직선의 x절편을 A, y절편을 B, 원점을 O라 할 때, $\triangle$OAB의 면적을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$를 지나는 직선은

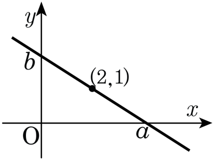
$$y = \frac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \frac{1}{2}x - 4$$

$\Rightarrow$ x절편은 8이고, y절편은 -4이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

22. 다음 그림에서 a와 b사이의 관계식을 나타내면?



① $a+\dfrac{a}{2}=1$

② $\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$

③ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1$

④ $\dfrac{2}{a}+b=1$

⑤ $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}=1$

해설

x 절편이 a, y 절편이 b 인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 이다.

따라서 $(2,\ 1)$ 을 지나므로

$\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ 이다.

23. 두 원 $x^2+y^2=1$과 $(x-k)^2+y^2=1$이 서로 접하도록 상수 k의 값을 정하면?

① ±1 ② ±2 ③ ±3 ④ ±4 ⑤ ±5

해설

주어진 두 원의 반지름의 길이가 같으므로 두 원은 외접하고, 두 원이 외접하려면 중심거리가 반지름의 길이의 합과 같아야 한다.

이때, 두 원의 중심이 $(0,0)$, $(k,0)$이므로 중심거리는

$$\sqrt{(k-0)^2+0^2}=\sqrt{k^2}=|k|$$

또, 두 원의 반지름의 길이의 합은 2이므로

$|k|=2$

$\therefore\ k=\pm2$

24. 직선 $3x+4y-5=0$를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3 만큼 평행 이동시켰을 때, 이 직선의 y절편의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ 3 ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ -8

해설

x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하므로 $3(x-2)+4(y+3)-5=0$으로 이동한다.

이 직선의 y절편은 $x=0$을 대입하면 $y=-\frac{1}{4}$

25. 직선 $x+y=1$은 두 점, $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 7)$을 잇는 선분 AB를 어떤 비로 내분하는가?

① $3:2$　② $2:3$　③ $1:1$　④ $2:1$　⑤ $1:2$

해설

선분 AB를 $m\ :\ n$ 으로 내분하는 점을 P 라 하면,
점 P 의 좌표는

$$\left(\frac{m\cdot 0+n\cdot(-2)}{m+n},\ \frac{m\cdot 7+n\cdot 0}{m+n}\right)=\left(\frac{-2n}{m+n},\ \frac{7m}{m+n}\right)$$

그런데, 점 P 는 직선 $x+y=1$ 위의 점이므로 대입하면,

$$\frac{-2n}{m+n}+\frac{7m}{m+n}=1,\ -2n+7m=m+n,\ 2m=n$$

$\therefore\ m:n=1:2$