1. 이차함수 $y = -2 + 3x - x^2$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$ ② $-\frac{16}{3}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4}$ 이므로

$x = \frac{3}{2}$ 가 x의 값의 범위 $-1 \le x \le 2$ 에 포함되므로

$x = \frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x = -1$ 에서 최댓값 -6을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

2. $-6 < a \leq 12,\ 3 < b \leq 4$ 일 때, ab 값의 범위를 구하면?

① $-3 < ab \leq 16$　② $-10 \leq ab \leq 9$　③ $-10 < ab < 9$

④ $-24 < ab \leq 48$　⑤ $-2 \leq ab \leq 4$

해설

$-6 < a \leq 12 \cdots\cdots$ ㉠

$3 < b \leq 4 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ $\times$ ㉡

$-6 \times 4 < ab \leq 12 \times 4$

3. 연립부등식 $\begin{cases} 5 - x > 1 \\ x + 3 < 2x \end{cases}$ 를 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3 < x < 4$

해설

$\begin{cases} 5 - x > 1 \\ x + 3 < 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x > -4 \\ -x < -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 3 \end{cases}$

$\therefore\ 3 < x < 4$

4. 부등식 $|2x-1| \geq 3$을 풀면?

① $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$

② $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

③ $x \leq -2$ 또는 $x \geq 2$

④ $x < 1$ 또는 $x > 2$

⑤ $x \leq 1$ 또는 $x > 2$

해설

$|2x-1| \geq 3$에서

$2x-1 \leq -3$ 또는 $2x-1 \geq 3$ 정리하면 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 2$

5. 다음 이차연립부등식을 만족하는 실수 x의 값의 범위는?

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 \quad \geq 0 \end{cases}$$

① $x \leq -3$ ② $-2 < x \leq 1$ ③ $-1 \leq x < 2$

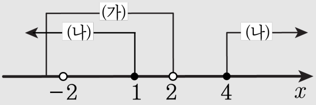
④ $0 < x \leq 2$ ⑤ $x > 3$

해설

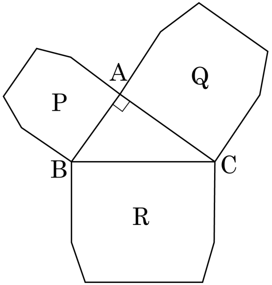
$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0, (x+2)(x-2) < 0 \\ \therefore -2 < x < 2 \cdots \text{(가)} \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0, \\ x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

따라서 (가), (나)의 공통 범위를 구하면

$-2 < x \leq 1$이다.



6. 다음 그림과 같이, 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 닮은 도형 P, Q, R가 있다. 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $xy = z$

② $x + y = z$

③ $x^2 + y^2 = z^2$

④ $x^3 + y^3 = z^3$

⑤ 위에는 정답이 없다.

해설

도형 P, Q, R가 닮은 도형들이고 그들의 닮음비가 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$이므로 도형 P, Q, R의 넓이의 비는 닮음비의 제곱인 $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$이 된다. 그런데 $\triangle ABC$는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$

따라서, 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z라 하면 $x + y = z$

7. 세 점 A(2, a), B(3, 4), C(b, -2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 2)일 때, $a-b$는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

세 점 A(2, a), B(3, 4), C(b, -2)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 무게중심의 좌표가 (1, 2)이므로,

$\frac{2+3+b}{3}=1$에서 $b=-2$

$\frac{a+4-2}{3}=2$에서 $a=4$

$\therefore\ a-b=6$

8. 두 점 (3, 2), (4, 5)를 지나는 직선에 평행하고, x 절편이 3 인 직선의 방정식은?.

① $y = 3x - 9$ ② $y = -3x + 9$ ③ $y = -3x - 3$

④ $y = \frac{1}{3}x - 9$ ⑤ $y = 3x + 5$

해설

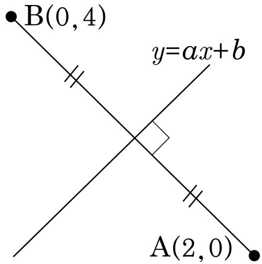
두 점 (3, 2), (4, 5)를 지나는 직선의 방정식은

$y - 2 = \frac{5-2}{4-3}(x-3)$

따라서 구하고자 하는 직선의 방정식은 기울기가 3 이고 x 절편이 3 이므로

$y = 3(x-3) \quad \therefore\ y = 3x - 9$

9. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}$ 를 수직이등분하는 직선 l 을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?



① 4 ② 2 ③ 1 ④ −2 ⑤ −4

해설

$\overline{AB}$ 의 기울기는 $\dfrac{4-0}{0-2} = -2$ 이므로

구하는 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

또, $\overline{AB}$ 의 중점 M 은

$\mathrm{M}(\dfrac{2+0}{2}, \dfrac{0+4}{2}) = (1, 2)$

따라서, 구하는 직선의 방정식은

$y - 2 = \dfrac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

$\therefore a + b = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$

10. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$

④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2 + (m - 3)x + 1 = 0, D = (m - 3)^2 - 4 > 0$

$m^2 - 6m + 5 > 0, (m - 1)(m - 5) > 0$

$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

11. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ② $-1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ③ $-1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1 ⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
  &   & 1 & 1 & 2 \\
\hline
  & 1 & 1 & 2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$\Rightarrow \ (x-1)(x^2+x+2) = 0$

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

12. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$　② $a = 1$

③ $a = \pm 1$　④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

13. 연립방정식 $\begin{cases} x-2y=1 \\ xy-y^2=6 \end{cases}$ 의 해를 구하면 $x=p,\ y=q$ 또는 $x=r,\ y=s$ 이다. $p+q+r+s$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -1

해설

$\begin{cases} x-2y=1 & \cdots ㉠ \\ xy-y^2=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=2y+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$y^2+y-6=0(y-2)(y+3)=0$

$\therefore\ y=2,\ -3$

$y=2,\ y=-3$을 ㉢에 대입하면

각각 $x=5,\ x=-5$

$\therefore\ x=5,\ y=2$ 또는 $x=-5,\ y=-3$

14. 200 원짜리 자두와 500 원짜리 복숭아를 합하여 9 개를 사는데, 그 값이 2800 원 이상 3600 원 이하가 되게 하려고 한다. 복숭아는 최대 몇 개까지 살 수 있는가?

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 6 개

해설

자두의 개수 : $(9-x)$ 개 , 복숭아의 개수 : x 개

$2800 \le 200(9-x) + 500x \le 3600$

$$\begin{cases} 2800 \le 200(9-x) + 500x \\ 200(9-x) + 500x \le 3600 \end{cases}$$

$\therefore \ \dfrac{10}{3} \le x \le 6$

따라서 살 수 있는 복숭아의 최대 개수는 6 개이다.

15. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양이 되기 위한 a 값의 범위는?

① $a < 7$　② $a > 9$　③ $6 < a \le 9$

④ $6 \le a < 9$　⑤ $7 < a < 9$

해설

$x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19) > 0$ 이므로

이 부등식의 $D < 0$ 이다.

$D = (a-5)^2 - 2(3a-19) = a^2 - 16a + 63 < 0$

$\therefore 7 < a < 9$

16. 점 $\mathrm{P}(1,2)$ 에서 직선 $2x+y-3=0$ 에 내린 수선의 발을 H 라할 때, 수선 PH 의 길이는?

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

($\overline{\mathrm{PH}}$ 의 길이)

$=$ (점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$ 와 직선 $2x+y-3=0$ 과의 거리)

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{PH}}=\frac{|2+2-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

17. 복소수 $z=a+bi$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은? (단, $a,\ b$는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi)$$
$$= (2a+3b)+(2b-3a)i \cdots ㉠$$

㉠이 실수이려면 $2b=3a$

$$\therefore\ b=\frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

18. 둘레의 길이가 24 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

반지름 x cm , 호의 길이를 $(24-2x)$ cm 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 6 cm 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 36 cm^2 를 가진다.
따라서 호의 길이는 $24-2x=12$ cm 이다.

19. 0이 아닌 실수 x, y가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서

$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$

$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$

$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$

$xy-2a$, $y-2ax$는 실수이므로

$xy-2a=0$, $y-2ax=0$

$\therefore\ xy=2a$, $y=2ax$

두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$

$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1$, $x=\pm 1$

20. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 $x,\ y$를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$

조건에서 $x,\ y$가 양의 정수이므로

$2x-1,\ y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases},\ \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

21. 두 부등식

$\frac{x-2}{2} > \frac{4x-k}{3}$, $\frac{3x+1}{4} < \frac{-x+1}{6}$ 의 해가 같을 때, 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{61}{22}$

해설

$\frac{x-2}{2} > \frac{4x-k}{3}$ 에서 $3x-6 > 8x-2k$

$\therefore x < \frac{2k-6}{5}$

$\frac{3x+1}{4} < \frac{-x+1}{6}$ 에서 $9x+3 < -2x+2$

$\therefore x < -\frac{1}{11}$

두 부등식의 해가 서로 같으므로

$\frac{2k-6}{5} = -\frac{1}{11}$

$\therefore\ k = \frac{61}{22}$

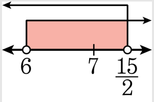
22. 어떤 자연수의 2 배에서 6 을 뺀 수는 9 보다 작고, 27 에서 그 자연수의 3 배를 뺀 수도 9 보다 작다고 한다. 이 때, 어떤 자연수를 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

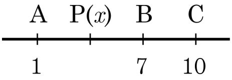
$$\begin{cases} 2x - 6 < 9 \\ 27 - 3x < 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x < 9 + 6 \\ -3x < 9 - 27 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x < \dfrac{15}{2} \\ x > 6 \end{cases}$$



$\therefore \ x = 7$

23. 수직선 위의 세 점 A(1), B(7), C(10) 과 동점 P(x) 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하면?



① P(5)　② P(6)　③ P(7)　④ P(8)　⑤ P(9)

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$

$= (x-1)^2 + (x-7)^2 + (x-10)^2$

$= 3(x-6)^2 + 42$

따라서, $x = 6$ 일 때 최소가 된다.

24. $2x^2+y^2=8$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 $4x+y^2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2+y^2=8$ 에서

$y^2=8-2x^2$ 으로 놓으면

$y^2=8-2x^2\geq 0, x^2-4\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 2$

이 때, $y^2=8-2x^2$ 을 $4x+y^2$ 에 대입하면

$4x+y^2=4x+(8-2x^2)^2=-2(x-1)^2+10$

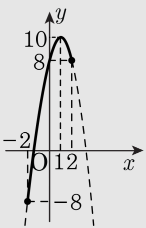
여기서 $f(x)=4x+y^2=-2(x-1)^2+10$

이라고 하면 $-2\leq x\leq 2$ 이므로

다음 그림에서 $x=1$ 일 때

$f(x)$ 의 최댓값은 10

$x=-2$ 일 때 $f(x)$ 의 최솟값은 $-2(-2-1)^2+10=-8$



따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10+(-8)=2$

25. $x+3y=5$, $4y+3z=6$ 일 때, 부등식 $x<3y<5z$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{5}{6}<x<\frac{10}{9}$ ② $\frac{30}{29}<x<\frac{5}{3}$ ③ $\frac{55}{29}<x<\frac{5}{2}$
④ $\frac{5}{2}<x<\frac{90}{29}$ ⑤ $-\frac{90}{29}<x<-\frac{5}{2}$

해설

$x+3y=5$를 y에 관하여 풀면

$y=\frac{5-x}{3}$

$4y+3z=6$을 z에 관하여 풀면

$z=\frac{6-4y}{3}=2-\frac{4}{3}y$

$y=\frac{5-x}{3}$ 을 대입하면

$z=2-\frac{4}{3}\times\frac{5-x}{3}=2-\frac{20-4x}{9}=\frac{4x-2}{9}$

$y=\frac{5-x}{3}$, $z=\frac{4x-2}{9}$ 를 부등식에 대입하면

$x<5-x<5\times\frac{4x-2}{9}$

$x<5-x$, $2x<5$

$x<\frac{5}{2}$ $\cdots$ ㉠

$5-x<\frac{5(4x-2)}{9}$, $45-9x<20x-10$,

$\frac{55}{29}<x$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{55}{29}<x<\frac{5}{2}$