1. 다음 이차함수 중 최솟값이 -2 가 되는 것은?

① $y = x^2 + 2x$

② $y = 2x^2 - 2$

③ $y = -(x+3)^2 + 2$

④ $y = -(x-2)^2 + 3$

⑤ $y = x^2 + 2x + 1$

해설

① 최솟값 -1 ③ 최댓값 2

④ 최댓값 3 ⑤ 최솟값 0

2. 부등식 $3x+2 \geq 8$을 풀면?

① $x \geq -2$ ② $x \geq -1$ ③ $x \geq -\frac{1}{2}$

④ $x \geq \frac{3}{2}$ ⑤ $x \geq 2$

해설

$3x+2 \geq 8,\ 3x \geq 6 \quad \therefore x \geq 2$

3. 연립부등식 $\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x+6 \geq -1+4x \end{cases}$ 를 풀어라.

① $5<x\leq 7$
② $-5<x,\ 7\leq x$
③ $-5<x\leq 7$
④ $-7\leq x<5$
⑤ $-7\leq x<-5$

해설

$\begin{cases} x-4<2x+1 \\ 3x+6 \geq -1+4x \end{cases}$ $\begin{cases} x>-5 \\ x\leq 7 \end{cases}$

$\therefore\ -5<x\leq 7$

4. 연립부등식 $\begin{cases} x-1>2x-3 \\ x^2 \le x+2 \end{cases}$ 의 해는?

① $x \le -1$ ② $-1 \le x < 1$ ③ $-1 \le x < 2$

④ $1 < x < 2$ ⑤ $2 \le x < 4$

해설

$x-1>2x-3$에서 $-x>-2$

$\therefore x<2 \cdots$ ㈎

$x^2 \le x+2$에서 $x^2-x-2 \le 0$

$\therefore -1 \le x \le 2 \cdots$ ㈏

따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면

$-1 \le x < 2$이다.

5. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$$A(\sqrt{5}-1, 1-\sqrt{2}),\ B(\sqrt{5}, 1+\sqrt{2})$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{5}+1)^2+(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{1+8} = 3$$

6. 두 점 A$(3,\ 2)$, B$(a,\ b)$ 를 $1 : 3$ 으로 내분하는 점을 P$(2,\ 1)$ 이라고 할 때, ab 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$$\mathrm{P}\left(\frac{1\cdot \mathrm{a}+3\cdot 3}{1+3},\ \frac{1\cdot \mathrm{b}+3\cdot 2}{1+3}\right)=\mathrm{P}(2,\ 1)$$ 이므로,

$$\frac{1\cdot a+3\cdot 3}{1+3}=2,\ a+9=8\ \therefore\ a=-1$$

$$\frac{1\cdot b+3\cdot 2}{1+3}=1,\ b+6=4\ \therefore\ b=-2$$

$\therefore\ ab=2$

7. 다음 주어진 조건을 만족하는 직선의 방정식을 구한 것 중 <u>틀린</u> 것을 고르면?

① 기울기가 2 이고, y 절편이 1 인 직선 : $y = 2x + 1$

② 점$(1, 0)$ 을 지나고, 기울기가 3 인 직선 : $y = 3x - 3$

③ 점 $(3, 5)$ 를 지나고, y 축에 평행한 직선 : $x = 3$

④ 두 점 $(2, 0), (0, -1)$ 을 지나는 직선 : $\frac{1}{2}x - y = 1$

⑤ 두 점 $(-1, -1), (3, 1)$ 을 지나는 직선 : $x + 2y - 1 = 0$

해설

⑤ $y = \frac{1-(-1)}{3-(-1)}(x-3) + 1,\ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad x - 2y - 1 = 0$

8. 두 점 $A(1,\ -4)$, $B(3,\ 2)$를 지나는 직선과 수직인 직선의 기울기는?

① -3　② $-\frac{1}{3}$　③ -1　④ $\frac{1}{3}$　⑤ 3

해설

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-(-4)}{3-1}=3$이므로

수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이다.

9. 두 점 $\mathrm{A}(-3, -2)$, $\mathrm{B}(1, 1)$로부터 같은 거리에 있는 점 P의 자취의 방정식을 구하면?

① $x+2y+3=0$

② $2x+y+3=0$

③ $4x-6y+15=0$

④ $4x+6y+7=0$

⑤ $8x+6y+11=0$

해설

$\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$이므로

$(x+3)^2 + (y+2)^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

$\therefore\ 8x+6y+11=0$

10. 직선 $y=3x+2$ 와 포물선 $y=x^2+mx+3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m<-1, m>3$　② $m<1, m>5$　③ $-1<m<3$

④ $-1<m<5$　⑤ $1<m<5$

해설

$y=3x+2, y=x^2+mx+3$ 에서 y 를 소거하면

$x^2+(m-3)x+1=0, D=(m-3)^2-4>0$

$m^2-6m+5>0, (m-1)(m-5)>0$

$\therefore\ m<1,\ m>5$

11. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x - 9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

12. 삼차방정식 $x^3 + x - 2 = 0$ 의 해를 구하면?

① $1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ② $-1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ ③ $-1, \ \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

④ -1 ⑤ 1

해설

조립제법을 이용하면

$$
\begin{array}{c|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\
 & & 1 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
\end{array}
$$

$\Rightarrow \quad (x-1)(x^2+x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 의 근 : $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

$\therefore$ 해 : $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

13. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

14. 모든 실수 x에 대하여 $a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$가 성립할 때 a의 최솟값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$a(x^2+2x+2) \geq 2x^2+4x+5$에서

$(a-2)x^2+2(a-2)x+(2a-5) \geq 0$

이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

$a-2>0 \cdots$ ㉠

판별식 $\dfrac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)(2a-5) \leq 0$이므로

$a^2-4a+4-(2a^2-9a+10)$

$=a^2-4a+4-2a^2+9a-10$

$=-a^2+5a-6$

$=-(a^2-5a+6)$

$=-(a-2)(a-3) \leq 0$

따라서 $(a-2)(a-3) \geq 0$이므로

$a \leq 2$ 또는 $a \geq 3 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a \geq 3$

따라서 a의 최솟값은 3

15. x축 위의 점 P로부터 직선 $4x+3y+2=0$까지의 거리가 2인 점은 두 개 있다. 이 때, 이 두 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면

P에서 직선까지의 거리가 2이므로

$$\frac{|4\cdot\alpha+3\cdot 0+2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

$\therefore |4\alpha+2|=10$

$4\alpha+2=\pm 10$

$\therefore \alpha=2,\ -3$

$\therefore$ 거리 l은 $l=2-(-3)=5$

16. 둘레의 길이가 $24\,\mathrm{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

반지름 $x\,\mathrm{cm}$, 호의 길이를 $(24-2x)\,\mathrm{cm}$ 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 $6\,\mathrm{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $36\,\mathrm{cm}^2$ 를 가진다.
따라서 호의 길이는 $24-2x=12\,\mathrm{cm}$ 이다.

17. 다음 방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$$

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=0$ 에서 $x^2+x=X$ 라 하면

$X^2-8X+12=0,\ (X-2)(X-6)=0$

$\therefore\ X=2$ 또는 $X=6$

(i) $X=2$ 일 때, $x^2+x=2$ 에서

$x^2+x-2=0,$

$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

(ii) $X=6$ 일 때, $x^2+x=6$ 에서

$x^2+x-6=0,$

$(x+3)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-3$ 또는 $x=2$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 해는

$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서, 해가 아닌 것은 ③

18. $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때, $\omega^{50}+\omega^{51}+\omega^{52}$의 값을 구하라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$x^3-1=0$의 한 허근이 ω일때
$(x-1)(x^2+x+1)=0$에서
$\omega^3=1, \omega^2+\omega+1=0$이 성립한다.
주어진 문제식을 ω^{50}으로 묶으면
$\omega^{50}(\omega^2+\omega+1)$이고
$\omega^2+\omega+1=0$이므로 답은 0이다.

19. 다음 연립방정식의 해가 <u>아닌</u> 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$ ② $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$ ⑤ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해 : $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}, \begin{cases} x = + - 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

(복부호동순)

20. 0이 아닌 실수 $x,\ y$가 $(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$을 만족할 때, x에 관한 이 방정식은 실수 a에 관계없이 일정한 근을 갖는다. 그 근을 모두 구하여라. $(a \neq 0)$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : -1

해설

$(x^2+1)(y^2+4a^2)-8axy=0$에서

$x^2y^2+4a^2x^2+y^2+4a^2-8axy=0$

$(x^2y^2-4axy+4a^2)+(y^2-4axy+4a^2x^2)=0$

$(xy-2a)^2+(y-2ax)^2=0$

$xy-2a,\ y-2ax$는 실수이므로

$xy-2a=0,\ y-2ax=0$

$\therefore\ xy=2a,\ y=2ax$

두 식을 연립하면, $2ax^2=2a$

$(a \neq 0)$이므로 $x^2=1,\ x=\pm 1$

21. $(a+b)x+(2a-3b)<0$의 해가 $x<-\frac{1}{3}$일 때, 부등식 $(a-3b)x+(b-2a)>0$을 풀어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-3$

해설

$(a+b)x+(2a-3b)<0$

$(a+b)x<3b-2a$

$\Rightarrow \quad x<\dfrac{3b-2a}{a+b}=-\dfrac{1}{3} \ (a+b>0)$

$\Rightarrow \quad a+b=-3(3b-2a)$

$\Rightarrow \quad a=2b, \quad a+b=3b>0 \rightarrow \ b>0$

$(a-3b)x+(b-2a)>0 \ \Leftrightarrow \ -bx-3b>0$

$bx<-3b$

$\therefore \quad x<-3 \ (\because \ b>0)$

22. 연립부등식 $-4+5x<3x-7\le 4x+1$을 만족하는 가장 작은 정수와 가장 큰 정수의 합을 구하여라.

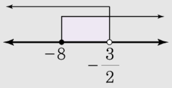
▶ 답 :

▷ 정답 : -10

해설

$-4+5x<3x-7\le 4x+1$

$$\rightarrow \begin{cases} -4+5x<3x-7 \\ 3x-7\le 4x+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{3}{2} \\ x\ge -8 \end{cases}$$



가장 큰 정수 : -2

가장 작은 정수 : -8

$\therefore\ (-2)+(-8)=-10$

23. 세 점 A(0, 0), B(1, 0), C(1, 2)에 대하여 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$이 최소가 되도록 점 P의 좌표를 정하면?

① $P\left(-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3}\right)$ ③ $P\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $P\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $P\left(-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

해설

$P(x,\ y)$라 두면

$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$

$= x^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y-2)^2$

$= 3x^2 - 4x + 3y^2 - 4y + 6$

$= 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{10}{3}$

$\therefore\ P(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3})$일 때 최소

※ 점 P는 $\triangle ABC$의 무게중심이 된다.

$\left(\frac{0+1+1}{3},\ \frac{0+0+2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

24. 점 (2, 1)에서 직선 $x-y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, H의 좌표는?

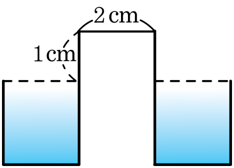
① H(3, 0) ② H(0, 3) ③ H(0, -3)

④ H(-3, 0) ⑤ H(0, 0)

해설

점 P(2, 1)을 지나고
직선 $x-y+3=0 \cdots$ ㉠에
수직인 직선 l의 기울기는 -1이므로,
l : $y-1=-1\cdot(x-2)$,
즉 l : $x+y-3=0 \cdots$ ㉡
점 H는 직선 ㉠과 직선 l의 교점이므로,
㉠ 과 ㉡ 를 연립하여 풀면 $x=0$, $y=3$
$\therefore$ H(0, 3)

25. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



① $125\,\text{cm}^2$　② $288\,\text{cm}^2$　③ $350\,\text{cm}^2$

④ $420\,\text{cm}^2$　⑤ $120\,\text{cm}^2$

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a, 가로의 길이를 b 라 하면

총길이는 $a+b+a+1+2+a+1+b+a=100$ 에서

$4a+2b=96$

$\therefore 2a+b=48$ 이므로 $b=48-2a$

한 개 단면의 넓이는 ab 이므로

$$\begin{aligned} a(48-2a) &= -2a^2+48a \\ &= -2(a^2-24a) \\ &= -2(a^2+24a+144-144) \\ &= -2(a-12)^2+288 \end{aligned}$$

따라서 $a=12$ 일 때 최대 넓이 $288\,\text{cm}^2$