1. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

2. x의 범위가 $-2,\ -1,\ 0,\ 1$일 때, 부등식 $2x \le 5x-3$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$2x \le 5x-3,\ -3x \le -3$

$\therefore\ x \ge 1$

따라서 이 부등식을 만족하는 해는 1이다.

3. 다음 연립부등식을 풀면?

$$\begin{cases} 3(x-2) > 2x+5 \\ 3x-4 < 2x+9 \end{cases}$$

① $10 < x < 12$ ② $11 < x < 14$ ③ $11 < x < 13$

④ $10 < x < 13$ ⑤ $9 < x < 15$

해설

i) $3(x-2) > 2x+5$

$\Rightarrow \ 3x-6 > 2x+5$

$\Rightarrow \ x > 11$

ii) $3x-4 < 2x+9$

$\Rightarrow \ x < 13$

$\therefore \ 11 < x < 13$

4. 다음 부등식을 풀면?

$$0.2x-3<\frac{1}{2}x-\frac{3}{10}\le 3-0.6x$$

① $-9<x\le 3$　② $-9\le x<3$　③ $-9\le x\le 3$

④ $-9<x<3$　⑤ $3\le x<9$

해설

$$0.2x-3<\frac{1}{2}x-\frac{3}{10}\le 3-0.6x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.2x-3<\frac{1}{2}x-\frac{3}{10} \\ \frac{1}{2}x-\frac{3}{10}\le 3-0.6x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-30<5x-3 \\ 5x-3\le 30-6x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-5x<-3+30 \\ 5x+6x\le 30+3 \end{cases}$$

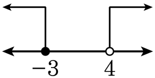
$$\Rightarrow \begin{cases} -3x<27 \\ 11x\le 33 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x>-9 \\ x\le 3 \end{cases}$$

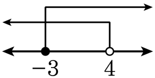
$\therefore\ -9<x\le 3$

5. 연립부등식 $\begin{cases} 7x-10>2x+10 \\ 5x+3\le 2(x-3) \end{cases}$ 의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

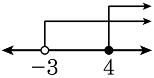
①



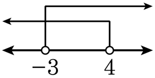
②



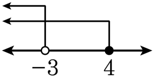
③



④



⑤



해설

$7x-10>2x+10,\ 5x>20,\ x>4$

$5x+3\le 2x-6,\ 3x\le -9,\ x\le -3$

$\therefore\ x\le -3,\ x>4$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-2 \leq x+a \\ 2x-b \leq 3x \end{cases}$ 의 해가 4 일 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\begin{cases} 3x-2 \leq x+a & \cdots ① \\ 2x-b \leq 3x & \cdots ② \end{cases}$ 이라 하면

①에서 $x \leq \dfrac{a+2}{2}$

②에서 $x \geq -b$

$\therefore \ -b \leq x \leq \dfrac{a+2}{2}$

이 부등식의 해가 4 이려면 $4 \leq x \leq 4$ 이어야 하므로

$-b=4$ 에서 $b=-4$, $\dfrac{a+2}{2}=4$ 에서 $a=6$

따라서 $a-b=6-(-4)=10$ 이다.

7. 수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$는 5이고 점 $C(a+b)$의 좌표를 -1이라 할 때, 점 $D(a-b)$의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$일때, $A(a)$, $B(b)$ 사이의 거리는 $a-b$이므로, $a-b=5$
따라서 $D(a-b)$의 좌표는 5

8. A $(4, 7)$, B $(3, 2)$, C $(5, 3)$, D (x, y)에 대하여 사각형 ABCD가 평행사변형일 때, $y - x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\left(\frac{4+5}{2}, \frac{7+3}{2}\right) = \left(\frac{x+3}{2}, \frac{y+2}{2}\right)$$

$\therefore \quad x + 3 = 9,\ y + 2 = 10$

$\therefore \quad x = 6,\ y = 8$

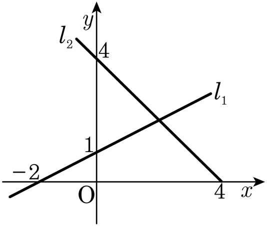
9. 좌표평면 위에 세 점 A$(-2,\ 1)$, B$(4,\ 7)$, C$(6,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC가 있다. 직선 $y=mx+2m+1$에 의하여 $\triangle$ABC의 넓이가 이등분될 때, m의 값은?

① $\frac{2}{7}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{4}{7}$　④ $\frac{3}{4}$　⑤ $\frac{6}{7}$

해설

직선 $y=m(x+2)+1$은 m 의 값에 관계없이
항상 점 $(-2,1)$을 지나므로 점 A를 지난다.
따라서 주어진 직선이 $\triangle$ABC 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점 M$(5,5)$를 지나야 한다.
$\therefore\ 5=m(5+2)+1$
$\therefore\ m=\frac{4}{7}$

10. 다음 그림과 같은 좌표평면 위의 두 직선 l_1, l_2 의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식은 $y = ax$ 이다. 이때, a 의 값은?



① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{1}{2}$　　③ 1

④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

직선 l_1 은 x절편이 -2이고,

y절편이 1이므로 $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$에서

$x - 2y = -2 \cdots\cdots$ ㉠

직선 l_2는 x절편이 4이고, y절편이 4이므로

$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$에서

$x + y = 4 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 풀면 $x = 2, y = 2$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = x$

$\therefore\ a = 1$

11. x에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) + \left(1+\sqrt{2}\right)\beta + \left(1-\sqrt{2}\right)\beta = 5$

$-1 + 2\beta = 5,\ 2\beta = 6 \quad \therefore\ \beta = 3$

따라서, $a = \left(1+\sqrt{2}\right) + \left(1-\sqrt{2}\right) + 3 = 5$

$b = \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot 3 = -3$이므로

$a + b = 5 + (-3) = 2$

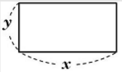
12. 가로의 길이가 세로의 길이보다 5 cm 더 긴 직사각형이 있다. 둘레의 길이가 34 cm 일 때, 이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이의 곱을 구하여라.(단, 단위 생략)

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

직사각형의 가로, 세로의 길이를
각각 $x$cm, $y$cm 라 하면



$x = y + 5 \quad \cdots\cdots ㉠$

또, 이 직사각형의 둘레는 $2(x + y)$ 이므로

$2(x + y) = 34$ 즉, $x + y = 17 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면

$y + 5 + y = 17,\ 2y = 12$

$\therefore\ y = 6$

$y = 6$ 을 ㉠에 대입하면 $x = 11$

$\therefore\ xy = 11 \times 6 = 66$

13. 방정식 $2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 을 만족시키는 실수 x, y의 곱 xy를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$에서

$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$

$(x+y)^2+(x-2)^2=0$

x, y가 실수이므로 $x+y=0$, $x-2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=-2$

$\therefore\ xy=-4$

14. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2 + 2ax - a + 2 \geq 0$이 성립하기 위한 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$x^2 + 2ax - a + 2 \geq 0$이 항상 성립하기 위해서는

$D/4 \leq 0$

$D/4 = a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1) \leq 0$

따라서 $-2 \leq a \leq 1$

$\therefore a = -2,\ -1,\ 0,\ 1$ (4개)

15. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, 이차부등식 $cx^2-bx+a>0$의 해는?(단,$\alpha>0$이다.)

① $-\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$　　② $-\beta<x<-\alpha$

③ $\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$　　④ $x>\frac{1}{\alpha},\ x<\frac{1}{\beta}$

⑤ $x>-\frac{1}{\beta},\ x<-\frac{1}{\alpha}$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $\alpha<x<\beta$이므로

$a<0,\ \alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$cx^2-bx+a>0$

에서 $a<0$이므로 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-\frac{b}{a}x+1<0$

$\therefore \alpha\beta x^2+(\alpha+\beta)x+1<0$

$\therefore (\alpha x+1)(\beta x+1)<0$이고

$0<\alpha<\beta$에서 $\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$이므로

$-\frac{1}{\alpha}<-\frac{1}{\beta}$

$\therefore -\frac{1}{\alpha}<x<-\frac{1}{\beta}$

16. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=10$

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$로 놓으면

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$x=\dfrac{3+\alpha}{4},\quad \dfrac{3+\beta}{4}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

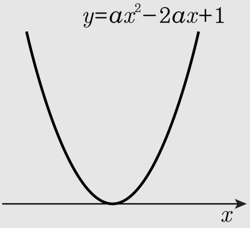
17. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \le 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

18. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-4x-5\le 0 \\ x^2-ax+b\le 0 \end{cases}$ 의 해가 $3\le x\le 5$ 이고,

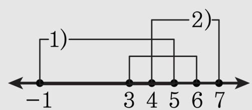
연립부등식 $\begin{cases} x^2-ax+b\le 0 \\ x^2-11x+28\le 0 \end{cases}$ 의 해가 $4\le x\le 6$ 일 때,

두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 15 ② 27 ③ 38 ④ 49 ⑤ 52

해설

1) $\begin{cases} x^2-4x-5\le 0 \\ x^2-ax+b\le 0 \end{cases}$ 의 해가 $3\le x\le 5$



2) $\begin{cases} x^2-ax+b\le 0 \\ x^2-11x+28\le 0 \end{cases}$ 의 해가 $4\le x\le 6$

1) 의 경우, $(x-5)(x+1)\le 0$ $\quad\therefore -1\le x\le 5$

2) 의 경우, $(x-7)(x-4)\le 0$ $\quad\therefore 4\le x\le 7$ 1), 2) 와 연립하여 각각 $3\le x\le 5$ 와 $4\le x\le 6$ 의 해가 될 수 있도록 동시에 만족시키는 범위는 $3\le x\le 6$ 이다.

따라서 $x^2-ax+b=(x-3)(x-6)\le 0$ $a=9$, $b=18$ $\therefore$ $a+b=27$

19. 두 삼각형이 있다. 그 중 한 삼각형은 세 변의 길이가 3, 4, x이고, 또 다른 삼각형의 세 변의 길이는 3^2, 4^2, x^2이다. 이 때, 정수 x의 값의 개수는?

① 2 개　② 3 개

③ 4 개　④ 5 개

⑤ 6 개 이상 무수히 많다.

해설

삼각형의 두 변의 합은 다른 한 변보다 커야 하므로 $3+4>x, 3+x>4,\ 4+x>3$,

$9+16>x^2,\ 9+x^2>16,\ 16+x^2>9$의

6개의 부등식을 만족하는

x값의 범위는 $\sqrt{7}<x<5$이고

x가 정수이므로 $x=3,\ x=4$이다.

20. 두 점 A(2, 0) , B(0, 2) 를 꼭짓점으로 하는 정삼각형 ABC 의 다른 꼭짓점 C 의 좌표를 구하면?

① $C(1+\sqrt{5},\ 1+\sqrt{5})$ 또는 $C(1-\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5})$

② $C(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $C(1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5})$

③ $C(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $C(1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$

④ $C(2+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$ 또는 $C(1-\sqrt{3},\ 0)$

⑤ $C(0,\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $(1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$

해설

꼭짓점 C를 $(x,\ y)$라 놓자.

$\overline{AB}^2 = (2-0)^2+(0-2)^2 = 8$

$\overline{BC}^2 = (x-0)^2+(y-2)^2 = x^2+y^2-4y+4$

$\overline{CA}^2 = (x-2)^2+y^2 = x^2+y^2-4x+4$

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 에서

$8 = x^2+y^2-4y+4 = x^2+y^2-4x+4$

$x=y$ 이므로 $2x^2-4x-4=0$, $x^2-2x-2=0$

$\therefore\ x = 1\pm\sqrt{3}$

따라서 꼭짓점 C의 좌표는 $C(1+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$ 또는 $C(1-\sqrt{3},\ 1-\sqrt{3})$

21. 직선 $x+ay-1=0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a>0$)

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $a=2$

해설

$y=-\frac{1}{a}x+\frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times \frac{1}{a}=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a=2$

22. 서로 평행한 두 직선 $3x-y+5=0,\ 3x-y-5=0$사이의 거리는?

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ $\sqrt{5}$　④ $\sqrt{7}$　⑤ $\sqrt{10}$

해설

서로 평행한 두 직선
$3x-y+5=0,\ 3x-y-5=0$사이의 거리는
직선 $3x-y+5=0$ 위의 점 $(0,5)$ 와
직선 $3x-y-5=0$ 사이의 거리와 같으므로
구하는 거리는

$$\frac{|0-5-5|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

23. 점 $(3,\ 4)$ 에서 직선 $2x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$\dfrac{|2\times 3-4+k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$ 이므로, $|2+k|=5$ 이다.

따라서 $k=3$ ($\because$ k 는 양수)

24. 다음 중 삼차방정식 $(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$이 허근을 갖기 위한 k의 값이 될 수 없는 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$(x-1)(x^2-2x)+(5-k)x+k-5=0$에서 $x^3-3x^2+(7-k)x+k-5=0$

$x=1$일때 성립하므로 $x-1$을 인수로 가지고 여기에 조립제법을 이용하면

$(x-1)(x^2-2x+-k)=0$

허근을 가지려면 $x^2-2x+5-k=0$의 판별식이 0보다 작아야 하므로 $D'=1-5+k<0$

$\therefore\ k<4$

25. 방정식 $x^3=1$의 한 허근을 w라 하고

$z=\dfrac{\omega+1}{2\omega+1}$라 할 때, $z\bar{z}$의 값을 구하면?

(단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다)

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{3}{4}$　④ $\dfrac{4}{5}$　⑤ $\dfrac{3}{7}$

해설

$x^3-1=0(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

$w,\ \overline{w}$는 $x^2+x+1=0$의

두 근이므로 근과 계수의 관계에서

$w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

또한, $z=\dfrac{\omega+1}{2\omega+1}$에서 $\bar{z}=\dfrac{\overline{w}+1}{2\overline{w}+1}$이므로

$$z\bar{z}=\frac{w+1}{2w+1}\times\frac{\overline{w}+1}{2\overline{w}+1}$$

$$=\frac{w\overline{w}+(w+\overline{w})+1}{4w\overline{w}+2(w+\overline{w})+1}=\frac{1-1+1}{4-2+1}=\frac{1}{3}$$

해설

$x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\ w^2+w+1=0$, $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$라 하자

$$z=\frac{w+1}{2w+1}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}{\sqrt{3}i}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}i-3}{6}=\frac{3-\sqrt{3}i}{6}$$

$$z\bar{z}=\frac{3-\sqrt{3}i}{6}\times\frac{3+\sqrt{3}i}{6}=\frac{9+3}{36}=\frac{1}{3}$$

26. $A : 0.4 - 0.25x \leq 1.5x - 1.35$, $B : -\dfrac{1-2x}{4} < \dfrac{2-x}{2} - \dfrac{x-1}{3}$가 있다. A에서 B를 제외한 수는?

① $x < 1$ ② $x \geq 1$ ③ $x < \dfrac{19}{16}$

④ $x \leq \dfrac{19}{16}$ ⑤ $x \geq \dfrac{19}{16}$

해설

$0.4 - 0.25x \leq 1.5x - 1.35$ 의 양변에 100을 곱하면

$40 - 25x \leq 150x - 135$

$175 \leq 175x$

$1 \leq x$

$A : 1 \leq x$

$-\dfrac{1-2x}{4} < \dfrac{2-x}{2} - \dfrac{x-1}{3}$ 의 양변에 12 를 곱하면

$-3(1-2x) < 6(2-x) - 4(x-1)$

$-3 + 6x < 12 - 6x - 4x + 4$

$x < \dfrac{19}{16}$

$B : x < \dfrac{19}{16}$ 이므로

A에서 B를 제외한 수는 $x \geq \dfrac{19}{16}$ 이다.

27. 15% 의 설탕물 300 g 이 있다. 여기에서 200 g 의 설탕물을 버리고 물 x g 을 넣어 10% 이상 12% 이하의 농도를 만들려고 할 때, x가 될 수 없는 것은?

① 25 ② 32 ③ 39 ④ 47 ⑤ 52

해설

설탕물을 200 g 버려도 물과 설탕을 함께 버린 것 이므로, 농도에는 변화가 없다.
따라서 설탕물을 버린 후 남은 설탕물은 똑같은 15% 의 설탕물 100 g 이다.

이 때의 소금물의 양은 $\frac{15}{100} \times 100 = 15(\mathrm{g})$ 이다.

여기에 물 x g 을 넣어줄 때의 농도를 식으로 나타내면 $\frac{15}{100+x} \times 100$ 이다.

농도가 10% 이상 12% 이하가 되게 해야 하므로, $10 \leq \frac{15}{100+x} \times 100 \leq 12$ 이다.
이를 연립방정식으로 나타내면

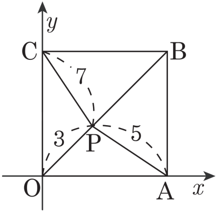
$$\begin{cases} 10 \leq \dfrac{15}{100+x} \times 100 \\ \dfrac{15}{100+x} \times 100 \leq 12 \end{cases}$$

이고, 정리하면

$$\begin{cases} x \leq 50 \\ x \geq 25 \end{cases}$$

이다. 따라서 $25 \leq x \leq 50$ 이다.

28. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $\overline{OP} = 3$, $\overline{AP} = 5$, $\overline{CP} = 7$일 때 선분 PB의 길이는?



① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$

④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

정사각형의 한 변의 길이를 a, 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \cdots ㉠ \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \cdots ㉡ \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$\overline{PB} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2}$이다.

㉡+㉢−㉠에서

$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$

따라서 $\overline{PB} = \sqrt{65}$

29. 세 꼭짓점이 $A(-1,\ -1)$, $B(4,\ 3)$, $C(0,\ 1)$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 를 $2:3$ 으로 내분하는 점을 각각 D, E, F 라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right),$$

즉 $(1,\ 1)$ 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 $(1,\ 1)$ 이다.

$\therefore\ a+b=1+1=2$

30. 직선 $(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점과 직선$x+2y-4=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

$(k-3)x+(k-1)y+2=0$ 을 k 에 대하여
정리하면$k(x+y)+(-3x-y+2)=0$ 이 식이
k 의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로
$x+y=0$, $-3x-y+2=0$
두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$
따라서 점 $(1,\ -1)$ 과 직선 $x+2y-4=0$
사이의 거리는

$$\frac{|1\cdot 1+2\cdot(-1)-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

31. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2+m^2x+n^2-2m=0$, $x^2-2mx+n^2+m^2=0$이 오직 하나의 공통근을 가지고, m, n이 실수일 때, $m+n$의 값은? (단, 중근인 경우에는 두 개의 실근으로 본다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 방정식의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2+m^2\alpha+n^2-2m=0 \cdots$ ①

$\alpha^2-2m\alpha+m^2+n^2=0 \cdots$ ②

① − ② 하면

$(m^2+2m)\alpha-(m^2+2m)=0$

$\therefore\ (m^2+2m)(\alpha-1)=0$

$\therefore\ m^2+2m=0$ 또는 $\alpha-1=0$

그런데 $m^2+2m=0$일 때,

곧, $m^2=-2m$일 때에는 두 방정식이 일치하게 되므로 오직 하나의 공통근을 가진다는 문제의 뜻에 어긋난다.

$\therefore\ \alpha=1$

이것을 ①에 대입하면

$1+m^2+n^2-2m=0 \quad \therefore\ (m-1)^2+n^2=0$

문제의 조건으로부터 m, n은 실수이므로

$m-1=0$, $n=0$

$\therefore\ m=1,\ n=0 \quad \therefore\ m+n=1$

32. 정점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y=x$에 대해 대칭시킨 점과 A를 x축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y=x$에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}'(2,4)$

x축에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}''(4,-2)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}} \geq \overline{\mathrm{A}'\mathrm{A}''}$

$=\sqrt{(2-4)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$

33. A(1, 4), B(−3, − 4), C(5, 2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle$A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 선분 DC의 길이는?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$\overline{AB} = 4\sqrt{5}$, $\overline{BC} = 10$, $\overline{CA} = 2\sqrt{5}$

$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2$이므로

$\triangle$ABC는 $\angle A = \angle 90°$인 직각삼각형이다.

각의 이등분선 정리에 의해

$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{CD} : \overline{DB}$

$\overline{CD} : \overline{DB} = 1 : 2$, $\overline{BC} = 10$이므로

$$\overline{DC} = \frac{1}{3} \times 10 = \frac{10}{3}$$