1. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 을 풀 때, xy의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\begin{cases} x-y=1 \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡를 곱셈법칙에 의해 변형하면,

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$5=1^2+2xy$

$\therefore\ xy=2$

2. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0,$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

3. 방정식 $xy+2x=3y+10$을 만족하는 양의 정수가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha\beta$의 값을 구하여라.

▶ 답:

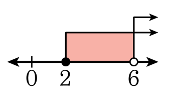
▷ 정답: 8

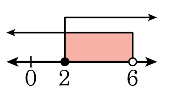
해설

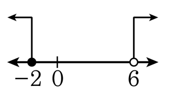
주어진 식을 변형하면
$xy+2x-3y=10,\ xy+2x-3y-6=4,$
$(x-3)(y+2)=4$
$y+2\geq 3$이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는
$x-3=1,\ y+2=4$
$\therefore\ x=4,\ y=2$

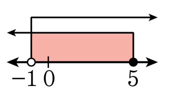
4. 다음 연립방정식의 해를 수직선 위에 바르게 나타낸 것은?

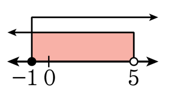
$$\begin{cases} 6(6-4x) \le -12 \\ 5(9x+1) < 275 \end{cases}$$

①


②


③


④


⑤


해설

$6(6-4x) \le -12 \;\Rightarrow\; x \ge 2$

$5(9x+1) < 275 \;\Rightarrow\; x < 6$

$\therefore\; 2 \le x < 6$

5. 연립부등식 $ax + 3 \le -4x + 7$, $5x - 2 \le 6x + b$의 해가 $x = 2$일 때, $a \times b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

두 식을 정리하면

$ax + 3 \le -4x + 7 \qquad \therefore\ x \le \dfrac{4}{a+4}$

$5x - 2 \le 6x + b \qquad \therefore\ x \ge -b - 2$

해가 $x = 2$가 되기 위해서는 $\dfrac{4}{a+4} = 2$, $-b-2 = 2$이어야 한다.

$\therefore\ a = -2$, $b = -4$

$\therefore\ a \times b = (-2) \times (-4) = 8$

6. 어느 연속하는 세 수의 합이 111 보다 크고 117 보다 작다고 할 때, 세 수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 114

해설

연속 하는 세 수 이므로 중간에 있는 수를 x 라고 하면 연속하는 세수는 $x-1,\ x,\ x+1$ 이라고 표현되고, 세수의 합은 $3x$ 이다.

문제의 조건을 따르면, $\begin{cases} 3x > 111 \\ 3x < 117 \end{cases}$, 또는 $111 < 3x < 117$ 로 표현 할 수 있다. 따라서 $\frac{111}{3} < x < \frac{117}{3}$ 이다. 이는 $37 < x < 39$ 이다 따라서 x 는 38 이다. 그러므로 $3x = 114$ 이다.

7. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a<m<b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3>2$

$(m+1)x^2-2(m-1)x+1>0$ 이므로

$m\neq-1,\ m>-1$ 이고, $D<0$ 이다.

$\frac{D}{4}=m^2-3m<0 \quad \therefore\ 0<m<3$

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=3$

8. x 에 대한 이차부등식 $x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값을 구하여라.

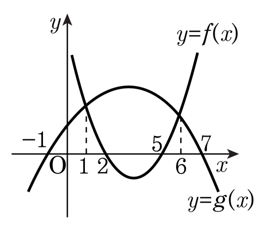
▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$x^2+ax+b>0$ 의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$ 이려면
$(x-1)(x-4)>0$ 에서 $x^2-5x+4>0$ 이므로
$a=-5$, $b=4$ 따라서 $a+b=-1$

9. 두 이차함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, 부등식 $0 < g(x) < f(x)$ 의 해는 $a < x < b$ 또는 $c < x < d$ 이다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값은?



① 14　② 13　③ 12

④ 11　⑤ 10

해설

$0 < g(x) < f(x)$ 에서 $g(x) > 0$ 이고 $g(x) < f(x)$

(ⅰ) $g(x) > 0$ 을 만족하는 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 7$

(ⅱ) $g(x) < f(x)$ 를 만족하는 x 의 값의 범위는 $x < 1$ 또는 $x > 6$

따라서, (ⅰ)과 (ⅱ)를 동시에 만족하는 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 1$ 또는 $6 < x < 7$

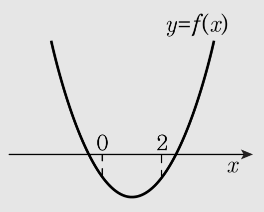
즉, $a = -1,\ b = 1,\ c = 6,\ d = 7$ 이므로 $a+b+c+d = 13$

10. 부등식 $0 \le x \le 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 의 영역에 포함되도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

부등식 $0 \le x \le 2$ 의 영역이 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 의 영역에 포함되어야하므로
$0 \le x \le 2$ 에서
$x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이어야 한다.
$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 라 하면
$0 \le x \le 2$ 에서
$f(x) \le 0$ 이어야 하므로
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같아야 한다.
$f(0) = a^2 - 4 \le 0$ 에서
$-2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠
$f(2) = a^2 - 2a \le 0$ 에서
$0 \le a \le 2 \quad \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통 범위를 구하면 $0 \le a \le 2$
따라서, 최댓값은 $M = 2$, 최솟값은 $m = 0$ 이므로
$M - m = 2$



11. 연립부등식

$$\begin{cases} x^2 \le 3x \\ x^2 + x \ge 2 \end{cases}$$ 의 해가 부등식

$ax^2 + 2bx - 6 \ge 0$ 의 해와 같을 때, ab 의 값을 구하면?

① 8　　② 4　　③ 2　　④ -4　　⑤ -8

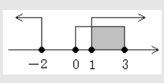
해설

$x^2 - 3x \le 0$, $x(x-3) \le 0$

$0 \le x \le 3$

$x^2 + x - 2 \ge 0$, $(x+2)(x-1) \ge 0$

$x \le -2, x \ge 1$



$(x-1)(x-3) \le 0$, $x^2 - 4x + 3 \le 0$

$\rightarrow -2x^2 + 8x - 6 \ge 0$

$a = -2, b = 4$

$\therefore ab = -8$

12. 두 삼각형이 있다. 그 중 한 삼각형은 세 변의 길이가 $3,\ 4,\ x$이고, 또 다른 삼각형의 세 변의 길이는 $3^2,\ 4^2,\ x^2$이다. 이 때, 정수 x 의 값의 개수는?

① 2 개 ② 3 개

③ 4 개 ④ 5 개

⑤ 6 개 이상 무수히 많다.

해설

삼각형의 두 변의 합은 다른 한 변보다 커야
하므로 $3+4>x, 3+x>4,\ 4+x>3$,
$9+16>x^2,\ 9+x^2>16,\ 16+x^2>9$의
6개의 부등식을 만족하는
x값의 범위는 $\sqrt{7}<x<5$이고
x가 정수이므로 $x=3,\ x=4$이다.

13. 직선 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 $\mathrm{A} * \mathrm{B}$, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1 : 3$으로 내분하는 점을 $\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B}$, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2 : 1$로 내분하는 점을 $\mathrm{A} \star \mathrm{B}$로 나타내기로 한다. 다음 중 $\mathrm{B} \star (\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B})$와 같은 것을 모두 고르면?

① $\mathrm{A} * \mathrm{B}$　　② $\mathrm{A} \star \mathrm{B}$

③ $(\mathrm{A} \star \mathrm{B}) * (\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B})$　　④ $(\mathrm{A} \star \mathrm{B}) \circledcirc \mathrm{A}$

⑤ $(\mathrm{B} * \mathrm{A}) \circledcirc (\mathrm{B} \star \mathrm{A})$

해설

두 점 A, B의 좌표를 각각 a, b라 하면

$$\mathrm{B} \star (\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B}) = \frac{b + 2 \cdot \frac{3a+b}{4}}{3} = \frac{a+b}{2} = \mathrm{A} * \mathrm{B}$$

$$(\mathrm{A} \star \mathrm{B}) * (\mathrm{A} \circledcirc \mathrm{B}) = \frac{\frac{a+2b}{3} + \frac{3a+b}{4}}{2} = \frac{13a+11b}{24}$$

$$(\mathrm{A} \star \mathrm{B}) \circledcirc \mathrm{A} = \frac{3 \cdot \frac{a+2b}{3} + a}{4} = \frac{a+b}{2} = \mathrm{A} * \mathrm{B}$$

$$(\mathrm{B} * \mathrm{A}) \circledcirc (\mathrm{B} \star \mathrm{A}) = \frac{3 \cdot \frac{a+b}{2} + \frac{2a+b}{3}}{4} = \frac{13a+11b}{24}$$

14. A $(-1,-1)$, B $(5,-2)$, C $(3,3)$을 세 꼭짓점으로 하고 $\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$를 이웃하는 두 변으로 하는 평행사변형 ABCD 에서 꼭짓점 D 의 좌표는?

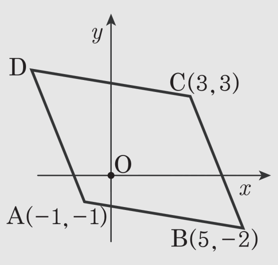
① $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$　② $(1,1)$　③ $(-3,4)$
④ $(8,1)$　⑤ $\left(4,\frac{1}{2}\right)$

해설

평행사변형의 두 대각선이 서로 이등분하므로
$\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치
$\mathrm{D}(x,y)$라 하면
$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점 : $\left(\frac{-1+3}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(1,1)$
$\overline{\mathrm{BD}}$의 중점 : $\left(\frac{5+x}{2},\frac{-2+y}{2}\right)$
$\frac{5+x}{2}=1,\ \frac{-2+y}{2}=1$
$\therefore\ x=-3, y=4$
$\therefore\ \mathrm{D}(-3,4)$

해설

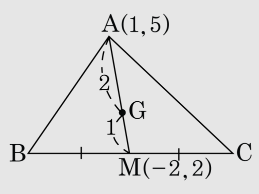
B $\rightarrow$ C로 갈 때 x축으로 -2, y축으로 $+5$만큼 이동했으므로
A $\rightarrow$ D로 갈때도 같은 만큼 이동한다.
$\therefore\ \mathrm{D}=(-1-2,-1+5)=(-3,4)$



15. $\triangle ABC$에서 점 $A(1,\ 5)$이고, $\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(-2,\ 2)$일 때, $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는?

① $(-1,\ 3)$ ② $(0,\ 2)$ ③ $(1,\ 2)$
④ $(2,\ -3)$ ⑤ $(2,\ 3)$

해설



$\overline{BC}$의 중점을 M이라 하고,
$\triangle ABC$의 무게중심을 G라 하면
G는 $\overline{AM}$을 $2:1$로 내분하는 점이다.
즉, 무게중심 G의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$$x = \frac{2\times(-2)+1\times1}{2+1} = -1$$

$$y = \frac{2\times2+1\times5}{2+1} = 3$$

따라서 무게중심의 좌표는 $(-1,\ 3)$이다.

16. 다음 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{10}$일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

$3x-y-6=0$,　 $3x-y+k=0$

▶ 답 :

▷ 정답 : $k=4$

해설

직선 $3x-y-6=0$ 위의 한 점 $(2,0)$ 에서 직선 $3x-y+k=0$ 까지의 거리가 $\sqrt{10}$이므로

$$\frac{|3\times2-0+k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|6+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

$|6+k|=10$

따라서 $k=4$ ($\because$ k 는 양수)

17. x에 대한 삼차방정식 $x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$이 중근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ $-\frac{8}{9}$　⑤ $-\frac{17}{9}$

해설

$x^3+(3a-1)x^2-5ax+2a=0$을 인수분해하면

$(x-1)(x^2+3ax-2a)=0$

ⅰ) 중근이 $x=1$인 경우

$x=1$을 $x^2+3ax-2a$ 에 대입하면 0이 된다.

$1+3a-2a=0$

$\therefore a=-1$

ⅱ) $x^2+3ax-2a=0$이 중근을 갖는 경우

판별식 $D=9a^2+8a=0,\ \ a(9a+8)=0,$

$\therefore a=0,\ a=-\frac{8}{9}$

$-1+0-\frac{8}{9}=-\frac{17}{9}$

18. 다음 두 이차방정식

$$\begin{cases} x^2+4mx-(2m-1)=0 \\ x^2+mx+(m+1)=0 \end{cases}$$

이 단 하나의 공통근을 가질 때, m의 값은 ?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근을 α라 하면

$\alpha^2+4m\alpha-(2m-1)=0\cdots$㉠

$\alpha^2+m\alpha+(m+1)=0\cdots$㉡

㉠ − ㉡ 하면

$3m\alpha-3m=0$

$3m(\alpha-1)=0 \quad \therefore\ m=0,\ \alpha=1$

$m=0$일 때 두 방정식이 일치하므로

단 하나의 공통근이라는 조건에 부적합

$\alpha=1$을 ㉡에 대입

$1+m+m+1=0 \quad \therefore\ m=-1$

19. 다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x \\ 0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \\ 1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5} \end{cases}$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 2 개

해설

$\frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x$ 의 양변에 6 을 곱하면 $2(2x+4) \geq 3(x-2) - 6x$,

$4x + 8 \geq 3x - 6 - 6x$,

$x \geq -2$

$0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3$ 의 양변에 10 을 곱하면 $3(2x-3) \leq 2(x+6) + 3$,

$6x - 9 \leq 2x + 12 + 3$,

$x \leq 6$

$1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5}$ 의 양변에 10 을 곱하면

$12x - 5 < 8x + 6$,

$4x < 11$,

$x < \frac{11}{4}$

연립부등식의 해는 $-2 \leq x < \frac{11}{4}$ 이고 속하는 자연수는 1, 2 의 2 개이다.

20. 제주시에서 남서쪽 1100 km 해상에 태풍의 중심이 있다. 이 태풍은 중심에서 반지름 50 km 이내가 폭풍우권이며, 30 km/h의 속도로 북동진한다. 지름도 10 km/h씩 넓어진다. 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은? (단, 제주시는 점으로 생각하고, 태풍은 직진한다고 가정한다.)

① 15시간 ② 16시간 ③ 30시간
④ 46시간 ⑤ 50시간

해설

$|-1100 + 30x - 0| \le 50 + 5x$

$-50 - 5x \le -1100 + 30x \le 50 + 5x$

$25x \le 1150$에서 $x \le 46$

$35x \ge 1050$에서 $x \ge 30$

$\therefore 30 \le x \le 46$

따라서, 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은 $46-30 = 16$(시간)이다.

21. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 12x - 45 > 0 \\ (x+2)(x - a^2 + 2a) < 0 \end{cases}$ 을 만족하는 x의 값이 존재하지 않을 때, 정수 a의 개수는?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

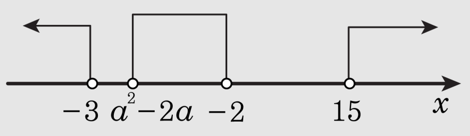
해설

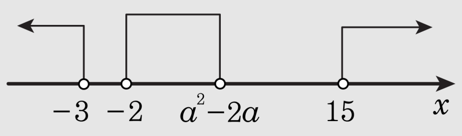
$x^2 - 12x - 45 > 0$에서

$(x+3)(x-15) > 0$

$\therefore x < -3$ 또는 $x > 15 \cdots$ ㉠

$(x+2)\left\{x - (a^2 - 2a)\right\} < 0 \cdots$ ㉡





$-3 \le a^2 - 2a \le 15$이면서

부등식 ㉠, ㉡를 동시에 만족하는

x은 존재하지 않는다.

(i) $-3 \le a^2 - 2a$에서

$a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 \ge 0$이므로

모든 실수 a에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $a^2 - 2a \le 15$에서

$a^2 - 2a - 15 \le 0,\ (a+3)(a-5) \le 0$

$\therefore -3 \le a \le 5$

따라서 정수 a는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

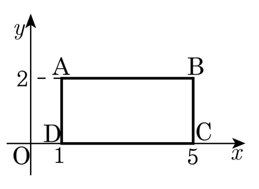
22. 세 점 $A(5,\ 0)$, $B(0,\ 3)$, $C(0,\ -3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8},\ 0\right)$　② $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$　③ $O\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$
④ $O\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$　⑤ $O(0,\ 0)$

해설

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{AO} = \overline{BO}$에서
$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$
즉 $5x - 3y = 8 \cdots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}$, $y = 0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$이다.

23. 점 $(-1,-1)$을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax+by+1=0$일 때, $a-b$의 값은?



① -3　② -1　③ 1　④ 3　⑤ 5

해설

$(-1,-1)$을 지나므로, $-a-b+1=0 \cdots$ ㉠
그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심 $\left(\frac{5+1}{2},\ \frac{0+2}{2}\right)$를 지나야 한다.
$\Rightarrow\ 3a+b+1=0 \cdots$ ㉡
㉠과 ㉡을 연립하면, $a=-1,\ b=2$
$\therefore\ a-b=-3$

24. 좌표평면 위의 원점에서 직선 $3x-y+2-k(x+y)=0$ 까지의 거리의 최대값은?(단, k 는 실수)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

해설

원점 O 에서 직선 $(3-k)x-(1+k)y+2=0$ 까지의 거리는

$$\frac{|2|}{\sqrt{(3-k)^2+(1+k)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

거리가 최대가 되려면 분모가 최소일 때이다.

$2k^2-4k+10=2(k-1)^2+8 \geq 8$ 이므로

$$\frac{2}{\sqrt{2k^2-4k+10}} \leq \frac{2}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 최대값 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

25. 좌표평면 위의 점 $P(3,\ 5)$ 를 지나고 기울기가 정수인 직선 중 x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선의 개수는?

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

점 $P(3,\ 5)$ 를 지나고 기울기가
m(m 은정수) 인 직선의 방정식은
$y-5=m(x-3)\cdots$①
①의 x 절편은 $-5=m(x-3)$
$\therefore\ x=3-\dfrac{5}{m}$
①의 y 절편은 $y-5=-3m\quad\therefore\ y=5-3m$
이 때, 정수 m 에 대하여 x 절편과 y 절편이 모두 정수가 되기 위해서는 m 의 값이 5 의 약수(음수 포함) 이어야 한다.
$\therefore\ m=1,\ 5,\ -1,\ -5$
따라서, x 절편과 y 절편이 모두 정수인 직선은
4개이다