1. 두 점 $\mathrm{A}(-1, 4), \mathrm{B}(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 $\mathrm{P}(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

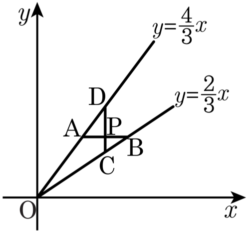
$\mathrm{P} = (a, 0)$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 에서

$(a+1)^2 + 4^2 = (a-6)^2 + 9$, $a = 2$

$\therefore\ \mathrm{P} = (2, 0)$

$a + b = 2$

2. 직선 $y=\frac{4}{3}x$ 와 $y=\frac{2}{3}x$ 사이에 위치한 제 1 사분면의 점 P 에서 x 축, y 축에 각각 평행한 선분을 그어 위의 두 직선과 만나는 점을 그림에서와 같이 각각 A, B, C, D 라 하자. 이 때, $\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}$ 의 값은?



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{8}{9}$
③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{9}{2}$
⑤ P 의 위치에 따라 일정하지 않다.

해설

직선 $y=\frac{4}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{DP}}{\overline{AP}}=\frac{4}{3}$

직선 $y=\frac{2}{3}x$ 의 기울기에서 $\frac{\overline{CP}}{\overline{BP}}=\frac{2}{3}$

$$\therefore \frac{\overline{AP}\cdot\overline{BP}}{\overline{CP}\cdot\overline{DP}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{DP}}\cdot\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{8}$$

3. 원점에서 직선 $3x-4y-5=0$에 이르는 거리를 구하면?

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

점과 직선 사이의 거리 구하는 공식을 이용하면,

$$\frac{|0\times3+0\times(-4)-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

4. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(2,\ -1)$ 에서 접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -12 ② -11 ③ -10 ④ -5 ⑤ -2

해설

접점 $(2,\ -1)$ 에서의 접선의 방정식은

$2x-y=5$

$\Rightarrow\ y=2x-5 \qquad \therefore\ ab=-10$

5. 평행이동 $f\ :\ (x,\ y) \rightarrow (x+1,\ y-2)$에 의하여 점$(3,\ 3)$은 어느 점에서 옮겨진 것인가?

① $(0,\ 0)$ ② $(3,\ 3)$ ③ $(1,-2)$

④ $(-1,\ 2)$ ⑤ $(2,\ 5)$

해설

평행이동 f는 x축의 방향으로 $+1$, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하는 변환이므로 $(a+1,\ b-2)=(3,\ 3)$ 따라서 $a=2,\ b=5$

6. $\triangle ABC$에서 $A(6,\ 1)$, $B(-1,\ 2)$, $C(2,\ 3)$이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 $P(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-2)^2$ ······ ㉠

$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2=(a-2)^2+(b-3)^2$ ······ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a-b-16=0,\ 2a-b-6=0$

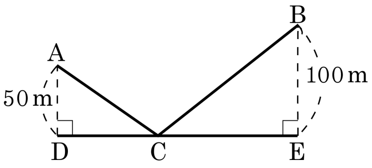
연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{PA}^2=(2-6)^2+(-2-1)^2=25$

$\therefore \overline{PA}=5$

7. 다음 그림과 같이 고압 전선 $\overline{DE}$가 지나는 곳으로부터 각각 $50\,m$, $100\,m$ 떨어진 두 지점에 빌딩 A, B가 위치하고 있다. 변압기를 D와 E 사이의 한 지점에 설치하여 빌딩 A, B에 전력을 공급하려고 한다. D와 E 사이의 거리가 $200\,m$일 때, 전체 전선의 길이 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : $250\,m$

해설

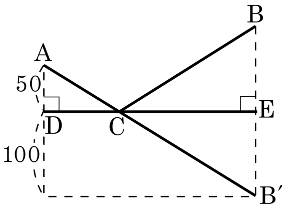
B를 $\overline{DE}$에 대해 대칭이동한 점을 B'이라 하면

$\overline{BC}=\overline{CB'}$이므로

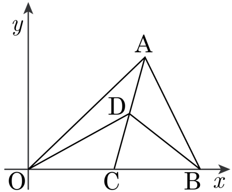
$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AC}+\overline{CB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 $\overline{AC}+\overline{BC}$의 최솟값은

$\overline{AB'}=\sqrt{200^2+150^2}=250(\,m)$



8. 좌표평면 위에 세 점 O(0, 0), A(2, 2), B(3, 0) 이있다. 선분 OB 위의 점 C 와 선분 AC 위의 점 D 에 대하여 4 개의 삼각형 OAD, OCD, ABD, BCD 의 넓이가 모두 같을 때, 점 D 의 x 좌표와 y 좌표의 합을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 2.75

해설

$\triangle$OCD 와 $\triangle$BCD 의 넓이가 같으므로

$\overline{OC} : \overline{BC} = 1 : 1$

즉, 점 C 는 선분 OB 의 중점이고,

$C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

또, $\triangle$OAD 와 $\triangle$OCD 의 넓이가 같으므로

$\overline{CD} : \overline{AD} = 1 : 1$

즉, 점 D 는 선분 AC 의 중점이므로,

$D\left(\frac{7}{4}, 1\right)$

따라서, 점 D 의 x 좌표와 y 좌표의 합은

$\frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4} = 2.75$

9. 평행사변형 ABCD의 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(-3,0)$, $B(-2,-2)$, $C(5,\ -2)$, $D(a,\ b)$이고, 선분 AC의 중점 $M(c,\ d)$일 때, $a+b+c+d$의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

평행사변형은 밑변과 윗변이 평행하면서 길이가 같아야 한다.
$A(-2-1,\ -2+2)$이므로 $D(5-1,\ -2+2)$에서
$D(4,0)$임을 알 수 있다.
중점을 구하는 공식을 사용하면
$c=\{5+(-3)\}\div 2=1$,
$d=\{0+(-2)\}\div 2=-1$
따라서 $a+b+c+d=4+0+1+(-1)=4$

10. 두 점 $\mathrm{A}(a, 4)$, $\mathrm{B}(1, b)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 하면, $\triangle\mathrm{OPQ}$의 무게중심은 $\mathrm{G}(-1, 1)$이다. 이 때, $a-b$의 값을 구하면?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$\mathrm{P}(x, 0), \mathrm{Q}(0, y)$라 하면

$\dfrac{0+x+0}{3} = -1$, $\dfrac{0+0+y}{3} = 1$에서

$x = -3,\ y = 3$

$\therefore \mathrm{P}(-3, 0), \mathrm{Q}(0, 3)$

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$에서 $(a+3)^2 + 4^2 = (1+3)^2 + b^2$

$a^2 + 6a + 9 = b^2$

$\overline{\mathrm{QA}}^2 = \overline{\mathrm{QB}}^2$에서 $a^2 + (4-3)^2 = 1^2 + (b-3)^2$

$a^2 = b^2 - 6b + 9$

두 식을 변변 빼고 정리하면

$a - b = -3$

11. 직선 $(a+2)x-y-a+b=0$ 이 x 축의 양의 방향과 $45°$ 의 각을 이루고 y 절편이 4 일 때, $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=(a+2)x-a+b$ 에서

기울기$=a+2=\tan 45°=1$

$\therefore\ a=-1$

y 절편 $-a+b=4$

$\therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2$

12. A $(1, 1)$, B $(-2, -3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \quad \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$\Rightarrow \quad \therefore \ k = 4$

13. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : ______사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

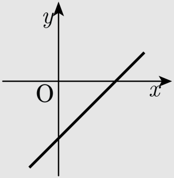
주어진 조건에서

$ab<0$, $bc>0$ 이므로

$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로



지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.

14. 좌표평면상의 점 $P(2,3)$ 에 대하여, 점 P 를 지나고 $\overline{OP}$ 에 수직인 직선의 방정식은?

① $x-2y=5$ ② $2x+3y=13$ ③ $x+3y=10$

④ $2x+y=13$ ⑤ $3x-2y=10$

해설

$\overline{OP}$ 의 기울기가 $\frac{3}{2}$ 이므로

수직인 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이다.

그리고 (2, 3) 을 지나므로

$\Rightarrow \quad y=-\frac{2}{3}(x-2)+3$

$\Rightarrow \quad 2x+3y=13$

15. 두 직선 $ax+by+1=0,\ bx+ay+1=0$ 이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타내면?

① $\dfrac{\sqrt{1}}{|a|}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{|a|}$ ④ $\dfrac{2}{|a|}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{|a|}$

해설

두 직선이 평행하면 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}\neq\dfrac{1}{1}$

$\therefore\ a=-b\ (\because\ a\neq b)$

직선 $ax+by+1=ax-ay+1=0$ 위의 한 점을

잡으면 $\mathrm{P}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ 이므로 직선

$bx+ay+1=0$ 에서 $-ax+ay+1=0$ 까지의

거리는 $\dfrac{\left|(-a)\cdot 0+a\cdot\dfrac{1}{a}+1\right|}{\sqrt{a^2+a^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{|a|}$

16. 직선 $3x+4y=0$ 에 평행하고 원점으로부터 거리가3 인 직선 중 1 사분면을 지나는 직선의 y 절편은?

① 15 ② -15 ③ $\frac{15}{4}$ ④ $-\frac{15}{4}$ ⑤ 3

해설

직선을 $3x+4y+a=0$ 라 하면,

$\frac{|a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$ 에서

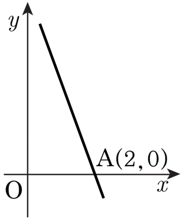
$\therefore \ a=\pm 15$

y 에 대해 정리하면 $y=-\frac{3}{4}x\pm\frac{15}{4}$

기울기가 음수인 직선이 1 사분면을 지나기 위해서는 y 절편은 양수이어야 한다.

따라서 이 직선의 y 절편은 $\frac{15}{4}$

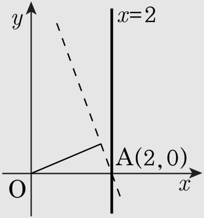
17. 점 $A(2,0)$ 을 지나는 임의의 직선 l 에 대하여 원점 O 와 직선 l 사이의 거리의 최댓값은?



① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$

④ $\sqrt{5}$ ⑤ 4

해설



다음의 그림에서 점 $A(2,0)$ 을 지나고
y 축에 평행한 직선 l , 곧 직선 $x=2$ 에 대하여
원점 O 와l 사이의 거리가 최대가 되며
이 때 그 거리는 2 이다

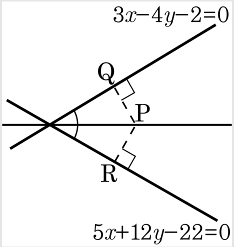
18. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의
점 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ 에 대하여 P에서
두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$13(3X-4Y-2)=\pm5(5X+12Y-22)$

즉, $13(3X-4Y-2)=5(5X+12Y-22)$ 또는

$13(3X-4Y-2)=-5(5X+12Y-22)$ 정리하면

$x-8y+6=0$ 또는 $8x+y-17=0$ 에서

기울기가 양이므로

$\therefore\ x-8y+6=0$

$\therefore a+b+c=-1$

19. 점 (1, 1) 을 지나고, x 축과 y 축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다. 이때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 4

해설

x 축 및 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 (a, a) 로 나타낼 수 있다.
또한 반지름 역시 a 로 볼 수 있다.
따라서 (a, a) 를 중심으로 하는 원의 방정식은
$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$ 이다.
점 $(1, 1)$ 은 이 원 위의 점이므로 등식을 만족시킨다.
따라서 $a=2\pm\sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.
두 점 사이의 거리 공식에 의해 두 원의 중심거리를 구하면
중심거리 d 는 $\sqrt{2((2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2}))^2}=4$ 이다.

20. 두 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+y^2=4$ 의 공통내접선의 길이는?

① $\sqrt{6}$　　② $\sqrt{7}$　　③ $2\sqrt{2}$　　④ 3　　⑤ $\sqrt{10}$

해설

두 원의 중심거리는

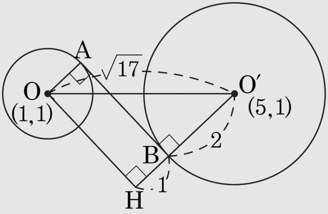
$\overline{OO'}=\sqrt{(5-1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{17}$

$\overline{O'H}=\overline{O'B}+\overline{BH}=\overline{O'B}+\overline{OA}=2+1=3$ 이므로

$\overline{AB}=\overline{OH}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{O'H}^2}=\sqrt{17-3^2}$

$=2\sqrt{2}$

따라서 공통내접선의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.



21. 원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$과 직선 $3x+4y-a=0$이 서로 접할 때, a의 값을 구하면?

① 3 또는 20　② 3 또는 23　③ 2 또는 18

④ 2 또는 25　⑤ 4 또는 30

해설

원의 방정식을 표준형으로 바꾸면

$(x-3)^2+(y-1)^2=2^2$

원의 중심 $(3,1)$ 에서 직선까지의 거리

d 가 2이면 접하므로

$$d=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 1-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\therefore\ |13-a|=10 \Leftrightarrow 13-a=\pm 10$

따라서, $a=3$ 또는 23

22. 직선 $y = x + k$가 원 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$와 만나서 생기는 현의 길이가 8 일 때, 상수 k의 값은?

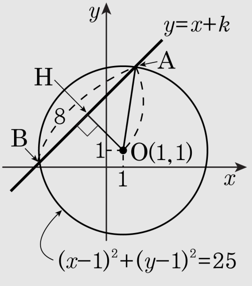
① $2\sqrt{3}$ ② $\pm 2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{2}$

④ $-3\sqrt{2}$ ⑤ $\pm 3\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 주어진 원과 직선의 교점을 A, B라 하고,
원의 중심 O(1, 1)에서 직선 $x - y + k = 0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$



직각삼각형 OHA에서

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \cdots ㉠$$

또 원의 중심 O(1, 1)에서
직선 $x - y + k = 0$
사이의 거리가 $\overline{OH}$이므로

$$\overline{OH} = \frac{|1 - 1 + k|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\dfrac{|k|}{\sqrt{2}} = 3$

$\therefore k = \pm 3\sqrt{2}$

23. 직선 $(a+2)x+(a-1)y-3=0$ 이 원 $2x^2+2y^2-4x+8y+3=0$ 의 넓이를 이등분할 때, a 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

$2x^2+2y^2-4x+8y+3=0$

$2(x-1)^2+2(y+2)^2=7$

$(x-1)^2+(y+2)^2=\dfrac{7}{2}$

따라서 원의 중심 $(1,-2)$ 가 직선 위에 있으므로 $(a+2)\times 1+(a-1)\times(-2)-3=0$

$\therefore\ a=1$

24. 점 $(3,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식 중 기울기가 음수인 것의 y절편을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(3,\ -1)$을 지나고 접선의 기울기를 m이라고 하면
접선은 $y+1=m(x-3)\cdots$①
따라서 원의 중심$(0,0)$에서 직선
$mx-y-3m-1=0$과의 거리가
원의 반지름 $\sqrt{5}$와 같다.

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5},\ |-3m-1|=\sqrt{5}\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면
$9m^2+6m+1=5m^2+5,\ 4m^2+6m-4=0$
따라서, 기울기 $m=\frac{1}{2},-2$
여기서 기울기가 음수인 -2를 ①에 대입하면
$y=-2x+5$
따라서 y절편은 5이다.

25. 이차방정식 $x^2+y^2=2|x|$과 $x^2+y^2=2|x+y|$의 공통근의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ____개

▷ **정답 :** 5 개

해설

$x^2+y^2=2|x|\cdots$ ㉠

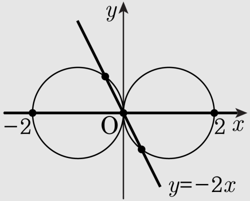
$x^2+y^2=2|x+y|\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡에서 $2|x|=2|x+y|$

$\therefore x+y=\pm x$

$\therefore y=0$ 또는 $y=-2x\cdots$ ㉢

㉠과 ㉢의 교점의 개수는 다음 그림에서 5개이다.



실제로, 교점을 구하면

$(0,\ 0),\ (\pm2,\ 0),$

$\left(\pm\frac{2}{5},\ \mp\frac{4}{5}\right)$

(복부호동순)

26. 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ 을 평행이동하여 원 $x^2 + y^2 = c$ 를 얻었다. 이 때, 상수 c 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $c = 5$

해설

원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ 을
표준형으로 바꾸면 $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$
$\therefore\ c = 5$

27. 포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 a , b 만큼 평행이동 하였더니 직선 $y = 2x + 1$ 에 접하였다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2}$ 의 최솟값은?

① $\frac{1}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

해설

포물선 $y = x^2 - 4x + 7$ 을 x 축, y 축의 방향으로
각각 a , b 만큼 평행 이동하면 포물선
$y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 가 된다.
이 포물선 $y = (x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b$ 와
직선 $y = 2x + 1$ 이 접하므로
두 식을 연립하면 $(x-a)^2 - 4(x-a) + 7 + b = 2x + 1$ 이다.
$x^2 - 2(a+3)x + a^2 + 4a + b + 6 = 0$ 이
중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (a+3)^2 - (a^2 + 4a + b + 6) = 2a - b + 3 = 0$$

$\therefore\ b = 2a + 3$

따라서, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (2a+3)^2}$

$$= \sqrt{5\left(a + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{9}{5}}$$ 이므로

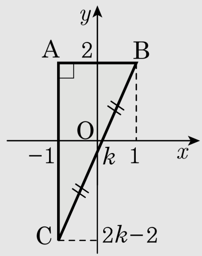
$a = -\frac{6}{5}$ 일 때,

최솟값 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 를 가진다.

28. 점 A $(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여 대칭이동한 점을 B , 점 B 를 점 $(0, k)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 C 라고 할 때, 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이다. 이 때, 모든 실수 k 의 값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설



점 A $(-1, 2)$ 를 y 축에 대하여
대칭이동한 점 B $(1, 2)$ 이고,
점 C (x, y) 라고 하면
$\overline{BC}$ 의 중점이 $(0, k)$ 이므로

$$\frac{1+x}{2} = 0, \quad \frac{2+y}{2} = k$$

$\therefore x = -1, \ y = 2k - 2$

$\therefore$ C $(-1, \ 2k - 2)$

이 때, 삼각형 ABC 는 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형이고
$\overline{AB} = 1 - (-1) = 2, \overline{AC} = |2k - 4|$ 이므로
삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot |2k - 4| = |2k - 4|$$

그런데 삼각형 ABC 의 넓이가 6 이므로

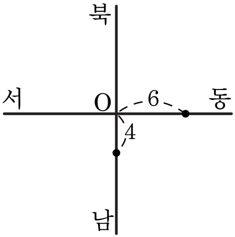
$|2k - 4| = 6$

$2k - 4 = 6$ 또는 $2k - 4 = -6$

$\therefore k = 5$ 또는 $k = -1$

따라서, 모든 실수 k 의 값의 합은 4 이다.

29. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후　　② 1.2 시간 후　　③ 1.4 시간 후

④ 1.6 시간 후　　⑤ 2 시간 후

해설

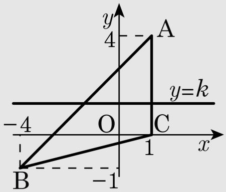
동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, −4) 이고 t 시간 후의 A, B 의 좌표는 A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다. 따라서, t 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2} = \sqrt{20t^2-64t+52} = \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52} = \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$ 이므로 $t=\frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. ∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

30. 좌표평면 위의 세 점 $A(1,4)$, $B(-4,-1)$, $C(1,0)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 직선 $y=k$가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $4-\sqrt{5}$ ② $4-\sqrt{6}$ ③ $4-\sqrt{7}$

④ $4-2\sqrt{2}$ ⑤ $4-\sqrt{10}$

해설



$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면, $y=\frac{-1-4}{-4-1}(x-1)+4$

$\Rightarrow \quad y=x+3$

$\therefore \quad y=k$와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 $(k-3,\ k),\ (1,\ k)$

$\Rightarrow$이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

$\frac{1}{2}\times(1-(k-3))\times(4-k)=5$

방정식을 풀면, $k=4\pm\sqrt{10}$

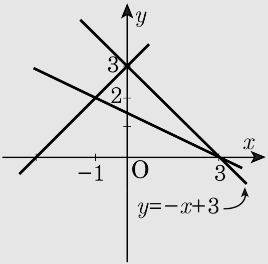
$\therefore \quad k=4-\sqrt{10}\ (\because \ k<4)$

31. 두 직선 $y=-x+3, y=mx+m+2$이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha<m<\beta$ 일 때, $2\alpha+\beta$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$m(x+1)-(y-2)=0$ 에서 $y=mx+m+2$ 는
m 의 값에 관계없이 $(-1,\ 2)$ 를 지난다.



$(3,\ 0)$ 을 지날때 $m=-\dfrac{1}{2}$

$(0,\ 3)$ 을 지날때 $m=1$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<m<1$

따라서 $2\alpha+\beta=\ 0$

32. 점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① P$(-4,\ 6)$　② P$(-4,\ -6)$　③ P$(2,\ 3)$

④ P$(3,\ 2)$　⑤ P$(-2,\ -4)$

해설

점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore$ P$(-4, -6)$

33. 원 $x^2+y^2-2x-8y+13=0$ 에 외접하고, 동시에 점 $(-2,\ 0)$ 에서 x 축에 접하는 원의 둘레의 길이는?

① $\frac{14}{3}\pi$ ② 5π ③ $\frac{16}{3}\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{15}{4}\pi$

해설

x 축에 접하는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

$(-2,\ 0)$ 을 지나므로

$(-2-a)^2+b^2=b^2 \ \Rightarrow\ a=-2$

$(x+2)^2+(y-b)^2=b^2$

$(x-1)^2+(y-4)^2=4$ 에 외접하므로 중심 사이의 거리는 반지름의 길이 합과 같다.

$\Rightarrow \ \sqrt{(1+2)^2+(4-b)^2}=b+2$

$\Rightarrow \ b=\frac{7}{4}$

$\therefore 2\cdot\pi\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{2}\pi$

34. 점 P$(a,\ b)$ 의 직선 $y=2x$ 에 대한 대칭점을 Q, 점 Q 를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 점을 R 이라 하면 두 점 R 과 P 가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭일 때, $3a+b$ 의 값은?

① $\frac{5}{2}$　　② 3　　③ $\frac{7}{2}$　　④ 4　　⑤ 5

해설

Q $=(X,\ Y)$ 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 는 $y=2x$ 에 수직하고,
P, Q 의 중점은 $y=2x$ 위에 존재한다.

$$\Rightarrow \quad \frac{Y-b}{X-a}\times 2=-1, \quad \frac{Y+b}{2}=2\times\frac{X+a}{2}$$

두 식을 연립하면, $X=\dfrac{4b-3a}{5}, \quad Y=\dfrac{4a+3b}{5}$

이제 Q 를 x 축으로 1 평행이동 시키면,

$$\mathrm{R}=\left(\frac{4b-3a+5}{5},\ \frac{4a+3b}{5}\right)$$

R 과 P 가 $y=x$ 대칭이므로,

$$\frac{4b-3a+5}{5}=b, \quad \frac{4a+3b}{5}=a$$

정리하면 $3a+b=5,\ a=3b$

두 식을 연립하면, $a=\dfrac{3}{2}, \quad b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \quad 3a+b=5$

35. 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(1,4)$ 를 다음 평행이동식 $f:(x,y)\rightarrow(x+m,y+n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P, Q 는 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$\mathrm{Q}=(1+m,4+n)$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기는 $y=2x$ 에 수직이므로 $-\frac{1}{2}$ 이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\frac{2+m}{2},\frac{8+n}{2}\right)$ 은

$y=2x$ 위에 있다.

$\Rightarrow$ i) $\frac{n}{m}=-\frac{1}{2}$

ii) $\frac{8+n}{2}=m+2$

i) 과 ii) 를 연립하면, $m=\frac{8}{5}$, $n=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ m+n=\frac{4}{5}$