1. 이차함수 $y = f(x)$ 에서 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 일 때, 함숫값을 구한 것 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

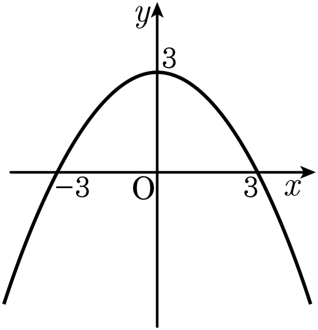
① $f(-1) = 0$　　② $f(0) = 0$　　③ $f(1) = -4$

④ $f(2) = -3$　　⑤ $f(5) = 12$

해설

② $f(0) = -3$

2. 다음의 그림과 같은 이차함수의 그래프의 식은?



① $y=-\frac{1}{3}x^2-3$ ② $y=-\frac{1}{3}x^2+3$ ③ $y=\frac{1}{3}x^2-3$

④ $y=\frac{1}{3}x^2+3$ ⑤ $y=-x^2+3$

해설

$y=ax^2+3$ 이 점 $(3,\ 0)$ 을 지나므로

$0=9a+3,\ a=-\frac{1}{3}$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x^2+3$

3. 다음 <보기>의 이차함수 그래프 중 포물선의 폭이 가장 넓은 것부터 차례대로 적은 것으로 옳은 것은?

보기

㉠ $y=\frac{1}{2}x^2$ ㉡ $y=\frac{1}{3}x^2$

㉢ $y=2x^2$ ㉣ $y=-5x^2$

① ㉣, ㉡, ㉠, ㉢ ② ㉣, ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉡, ㉠, ㉣, ㉢

④ ㉡, ㉠, ㉢, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣, ㉠

해설

$y=ax^2$ 에서 $|a|$ 이 작을수록 포물선의 폭이 넓다.

4. 이차함수 $y = 2(x-3)^2 + 1$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시킨 그래프의 y 절편이 $2a$ 일 때, a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

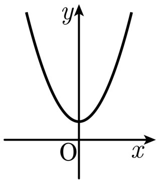
해설

$$y = 2(x-3+3)^2 + 1 + a$$
$$= 2x^2 + 1 + a$$

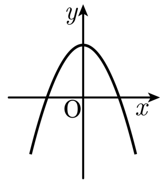
따라서 y 절편이 $1 + a = 2a$ 이므로 $a = 1$ 이다.

5. $a < 0$, $q < 0$ 일 때, 이차함수 $y = -ax^2 + q$ 의 그래프로 알맞은 것은?

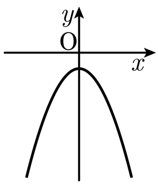
①



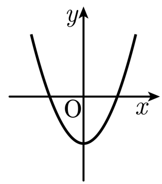
②



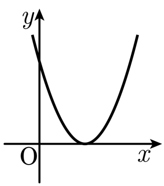
③



④



⑤



해설

이차함수의 그래프 $y = -ax^2 + q$ 에서 $a < 0$ 이므로 $-a > 0$ 이다.
따라서 아래로 볼록이다.
또한, 이차함수 $y = -ax^2 + q$ 꼴의 그래프는 대칭축이 $x = 0$ 이다.
$q < 0$ 이므로 y 축 아래에 꼭짓점이 존재한다.
따라서 답은 ④번이다.

6. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 점 $(-3,\ 9)$ 를 지난다고 한다. 이때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = ax^2$ 의 그래프가 점 $(-3, 9)$ 를 지나므로 $9 = a \times (-3)^2$

$\therefore\ a = 1$

7. 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - k$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y = 2x + 3$ 위에 있을 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}x^2 + 2x - k \\
&= \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4 - 4) - k \\
&= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 - k
\end{aligned}
$$

꼭짓점 $(-2,\ -2-k)$ 가 $y = 2x + 3$ 의 위에 있으므로

$-2 - k = -4 + 3$

$\therefore k = -1$

8. 이차함수 $y = -3x^2 + kx + 7$ 의 그래프에서 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 x 의 값의 범위가 $x < 4$ 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

축의 방정식 $x = 4$ 이므로

$y = -3x^2 + kx + 7$

$= -3(x-4)^2 + 55$

$= -3x^2 + 24x + 7$

$\therefore k = 24$

9. $y=2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 후 다시 x 축에 대하여 대칭이동 한 그래프의 식을 구하면?

① $y=-2(x+3)^2$

② $y=-2(x-3)^2$

③ $y=2(x-3)^2$

④ $y=2(x+3)^2$

⑤ $y=-2(3x-1)^2$

해설

$y=2x^2$ 의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 $y=2(x-3)^2$ 이고, 이를 x축에 대하여 대칭이동하면 $-y=2(x-3)^2$ 이다.

따라서 $y=-2(x-3)^2$ 이다.

10. 다음 중 이차함수의 그래프에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① $y = 2x^2 + 1$ 의 그래프는 아래로 볼록하다.

② $y = -2(x+2)^2$ 의 그래프는 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동 시킨 것이다.

③ $y = -(x-5)^2$ 의 그래프는 x 축과 한 점에서 만난다.

④ $y = -(x-3)^2 + 1$ 의 그래프의 꼭짓점 좌표는 $(3,\ 1)$ 이다.

⑤ $y = x^2$ 의 그래프는 $y = -x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

해설

② $y = -2(x+2)^2$ 은 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -2 만큼 평행이동시킨 것이다.

11. 이차함수 $y=3x^2-12x+1$ 와 $y=2x^2+px+q$ 와 꼭짓점이 일치할 때, $p-q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$$\begin{aligned} y &= 3x^2-12x+1 \\ &= 3(x^2-4x+4-4)+1 \\ &= 3(x-2)^2-11 \end{aligned}$$

이므로 꼭짓점의 좌표는 $(2,\ -11)$ 이고,

$y=2x^2+px+q$ 와 꼭짓점이 일치하므로

$$\begin{aligned} y &= 2(x-2)^2-11 \\ &= 2x^2-8x-3 \end{aligned}$$

이므로 $p=-8,\ q=-3$ 이다.

$\therefore p-q=-5$

12. 이차함수 $y = 2(x-4)^2 - 6$ 의 그래프를 x 축 방향으로 p 만큼, y 축 방향으로 q 만큼 평행이동하여 $y = 2(x+3)^2 + 3$ 이 되었다. $p+q$ 의 값은?

① -10 ② -2 ③ 2 ④ 6 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} y &= 2(x-4-p)^2 - 6 + q \\ &= 2(x+3)^2 + 3 \end{aligned}$$

$-4-p=3$

$\therefore p=-7$

$-6+q=3$

$\therefore q=9$

$p+q=(-7)+9=2$

13. 이차함수 $y = 4x^2 + kx + 2$의 그래프의 꼭짓점이 $y = x - 1$의 그래프 위에 있고 $x > a$이면 y의 값이 증가하고, $x < a$이면 y의 값은 감소한다. 이 때 꼭짓점의 좌표를 구하여라. (단, $a < 0$)

① $(-1, -1)$ ② $(-1, -2)$ ③ $(1, 1)$

④ $(1, 2)$ ⑤ $(1, 3)$

해설

축의 방정식이 $x = a$ 이므로 꼭짓점의 x 좌표가 a 이다.
따라서 $(a, a-1)$ 을 지나므로 $y = 4(x-a)^2 + a - 1 = 4x^2 - 8ax + 4a^2 + a - 1$ 이고 $4a^2 + a - 1 = 2$ 이다.
따라서 $(4a-3)(a+1) = 0$ 이므로 $a = -1(a < 0)$ 이므로 꼭짓점은 $(-1, -2)$ 이다.

14. 이차함수 $y = 2x^2 + 4x + k$ 의 그래프가 x 축과 한 점에서 만난다고 한다. k 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ -2 ⑤ 2

해설

x 축과 한 점에서 만나려면
$y = a(x-p)^2$ 꼴이 되어야 한다.

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x + k = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) + k \\ &= 2(x+1)^2 - 2 + k \end{aligned}$$

$\therefore -2 + k = 0, k = 2$

해설

$2x^2 + 4x + k = 0$ 이 중근을 가지므로 판별식 $D = 0$ 이다.
$D = 4^2 - 8k = 0$
$\therefore k = 2$

15. 두 함수 $(a^2-3a+2)y^2+2y-4x^2-1=0$과 $y=(2a^2-8)x^2-3x+1$이 모두 y 가 x 에 관한 이차함수가 되도록 상수 a 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

i) $(a^2-3a+2)y^2+2y-4x^2-1=0$이 x 에 관한 이차함수가 되기 위해서는 $a^2-3a+2=0$ 이어야 하므로 $(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

ii) $y=(2a^2-8)x^2-3x+1$이 x에 관한 이차함수가 되기 위해서는 $2a^2-8\neq 0$ 이어야 하므로 $a\neq \pm 2$

i), ii) 에 의하여 $a=1$ 이다.

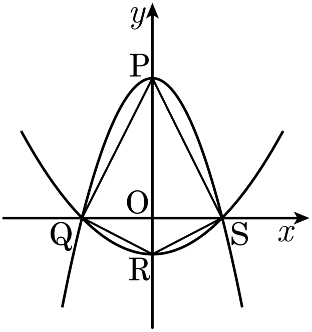
16. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프는 점 $(a,\ 12)$ 를 지나고, 이차함수 $y = bx^2$ 과 x 축에 대하여 대칭이다. 이 때, ab 의 값은?

① ± 2 ② ± 3 ③ ± 5 ④ ± 6 ⑤ ± 7

해설

$y = 3x^2$ 에 $(a,\ 12)$ 를 대입하면 $a = \pm 2$ 이다.
x 축과 대칭인 함수는 x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로 $b = -3$ 이다.
$\therefore ab = \pm 6$

17. 함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동하고, $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그림을 나타낸 것이다. 이 때 다음 설명 중 옳은 것의 개수는?



㉠ 점 $P(0,4)$ 이고, 점 $R(0,-1)$ 이다.
㉡ 점 $Q(2,0)$ 이고, 점 $S(-2,0)$ 이다.
㉢ $\overline{QS}=8$ 이다.
㉣ $\triangle PRS=5,\ \triangle QPR=8$ 이다.
㉤ $\square PQRS=12$ 이다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-x^2+4$

함수 $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{1}{4}x^2-1$

$y=-x^2+4$ 에 $y=0$ 을 대입하면 점 $Q(-2,0),\ S(2,0)$ 이다.
$\overline{QS}=4$
또, $P(0,\ 4)$ 이고 $R(0,\ -1)$
$\triangle PRS=\triangle QPR=5$
따라서 옳은 것은 ㉠이므로 1 개이다.

18. 이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 점 $(k,\ 4)$를 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 구하여라.

▶ **답 :**

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

▷ **정답 :** -5

해설

이차함수 $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 0)$ 이 되도록 평행이동하면 $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$ 이다. 점 $(k,\ 4)$를 지나므로 대입하면 $4=\frac{1}{4}(k+1)^2,\ 16=(k+1)^2,\ k+1=\pm 4$ 따라서 $k=3,\ -5$ 이다.

19. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

ㄱ $y = -\frac{3}{2}x^2$ ㄴ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

ㄷ $y = 2x^2 - x$ ㄹ $-3(x+2)^2$

ㅁ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

① $1 < |a| < \frac{1}{2}$ ② $1 < |a| < \frac{3}{2}$ ③ $1 < |a| < \frac{5}{2}$

④ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

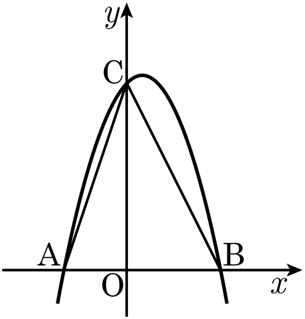
해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.

a 의 절댓값을 각각 구하면

ㄱ $\frac{3}{2}$ ㄴ $\frac{1}{2}$ ㄷ2 ㄹ3 ㅁ1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㄴ, ㅁ, ㄱ, ㄷ, ㄹ 이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로 ④ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

20. 이차함수 $y=-x^2+x+6$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $\triangle \mathrm{ABC}$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$y=-x^2+x+6$ 의 C 의 좌표 $(0,6)$

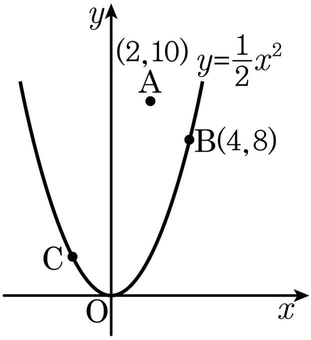
$-x^2+x+6=0$, $(x-3)(x+2)=0$

$\therefore\ x=3$ 또는 $x=-2$

$\mathrm{A}(-2,0), \mathrm{B}(3,0)$ 이므로

$\triangle \mathrm{ABC}$ 의 넓이는 $5\times 6\times \dfrac{1}{2}=15$

21. 정점 A$(2, 10)$, B$(4, 8)$에 대하여 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$의 그래프 위에 점 C를 잡고 $\angle$B가 직각인 직각삼각형 ABC를 만들 때, 점 C의 y좌표를 p라 하자. 또 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$의 그래프 위에 점 D를 잡아서, $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BD}}$인 이등변삼각형 ABD를 만들 때, 점 D의 y좌표를 q라 하자. 이 때, $p + (q-7)^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

직선 AB의 방정식은 $y = -x + 12$
따라서, 직선 AB에 수직인 직선 BC는 점 $(4, 8)$을 지나고, 기울기 1인 직선이다.
$\therefore y = x + 4$
$\frac{1}{2}x^2 = x + 4,\ x^2 - 2x - 8 = 0,\ (x-4)(x+2) = 0$
$\therefore x = -2$ 또는 $x = 4$
점 C의 x좌표가 -2이므로
y좌표는 $\frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2 = p$
$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $(3, 9)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y = x + 6$이다. $\frac{1}{2}x^2 = x + 6x^2 - 2x - 12 = 0$
$\therefore x = 1 \pm \sqrt{1-(-12)} = 1 \pm \sqrt{13}$
$$y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})^2$$
$$= \frac{1}{2}(14 \pm 2\sqrt{13}) = 7 \pm \sqrt{13} = q$$
$\therefore p + (q-7)^2 = 2 + 13 = 15$

22. 두 이차함수 $y=-3x^2+6x+5$, $y=-3x^2+12x-4$ 의 그래프가 $y=p$ 와 만나는 두 점을 각각 A, B 와 C, D 라 하고 y 축과 만나는 점을 각각 E, F, 직선 $x=q$ 와 만나는 점을 각각 G, H 라 할 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{GH}}}$ 의 값을 구하여라. (단, $p<0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y=-3x^2+6x+5$ 는 $y=-3(x-1)^2+8$
$y=-3x^2+12x-4$ 는 $y=-3(x-2)^2+8$ 이므로
$y=-3x^2+12x-4$ 의 그래프는 $y=-3x^2+6x+5$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 두 그래프의 폭이 같다.
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{GH}}$
$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{GH}}}=2$

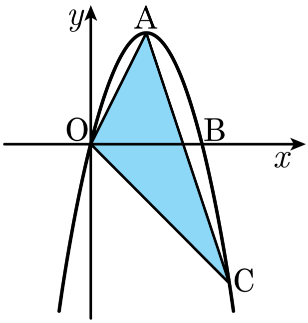
23. 이차함수 $y = x^2 - 5x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라 할 때, 점 P 에서 점 Q 사이의 거리가 9 일 때, 이 포물선의 y 절편을 구하여라.

① -14　② -7　③ -1　④ 4　⑤ 45

해설

점 P 의 좌표 a 라 하면 Q 좌표는 $a+9$
두 근의 합은 5
$\therefore\ a + (a+9) = 5,\ a = -2$
$\therefore$ 두 점은 $(-2,\ 0),\ (7,\ 0)$
두 근의 곱은 $k = (-2) \times 7 = -14$

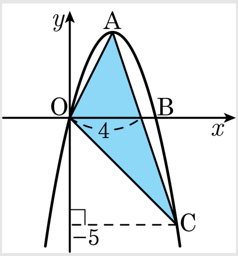
24. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $\triangle AOB : \triangle OBC = 4 : 5$ 가 되는 점 C 의 좌표는? (단, 점 A 는 꼭짓점, 점 B 는 포물선과 x 축과의 교점, 점 C 는 포물선 위에 있는 4 사분면의 점이다.)



① $(5, -5)$　② $(4, -3)$　③ $(6, -2)$
④ $(2, -8)$　⑤ $(3, -4)$

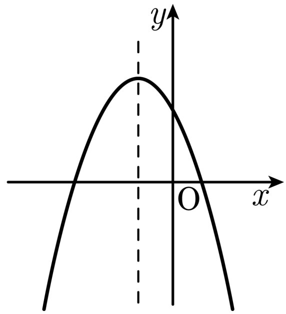
해설

$y = -x^2 + 4x = -(x-2)^2 + 4$ 이므로 꼭짓점 $A(2, 4)$
또한 $y = 0$ 일 때, $0 = -x^2 + 4x \Leftrightarrow x(x-4) = 0$
따라서 점 $B(4, 0)$ 이다. $\therefore \triangle AOB = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$
$\triangle AOB : \triangle OBC = 4 : 5$ 이므로 $\triangle OBC$ 의 넓이는 10 이다.



$\triangle OBC$ 의 밑변을 $\overline{OB} = 4$ 라고 하면 높이는 5 가 된다. 즉 점 C 의 y 좌표가 -5 이다.
점 C 의 x 좌표를 c 라고 하면 $-c^2 + 4c = -5$
$c^2 - 4c - 5 = 0 \Leftrightarrow (c-5)(c+1) = 0$, $c > 0$ 이므로 $c = 5$
$\therefore C(5, -5)$

25. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y=cx^2+ax+b$ 의 그래프의 꼭짓점은 제 몇 사분면에 있는가?



① 제1 사분면　　② 제2 사분면　　③ 제3 사분면

④ 제4 사분면　　⑤ 답이 없다.

해설

$a<0,\ c>0,\ -\dfrac{b}{2a}<0$ 에서 $b<0$ $\therefore\ a<0,\ b<0,\ c>0$

$y=cx^2+ax+b$ 에서

(1)$c>0$ 이므로 아래로 볼록

(2) 꼭짓점의 x 좌표를 구하면

$$y=c\left(x^2+\frac{a}{c}x+\frac{a^2}{4c^2}-\frac{a^2}{4c^2}\right)+b$$

$$=c\left(x+\frac{a}{2c}\right)^2-\frac{a^2}{4c}+b\text{이므로}$$

축 : $-\dfrac{a}{2c}>0$

(3)y 절편 : $b<0$

따라서, 그래프는 다음 그림과 같으므로 꼭짓점은 제4 사분면에 있다.