

1. 좌표평면 위의 두 점 $P(a, 3)$, $Q(1, a)$ 에 대하여 $\overline{PQ} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \text{ 이므로 } \sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 2a^2 - 8a + 10 = 2$$

$$2a^2 - 8a + 8 = 0, a^2 - 4a + 4 = 0, (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2$$

2. 삼차방정식 $x^3 - mx^2 + 24x - 2m + 4 = 0$ 의 한 근이 $4 - 2\sqrt{2}$ 일 때, 유리수 m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 10$

해설

$x = 4 - 2\sqrt{2}$ 를 주어진 방정식에 대입하면

$$(4 - 2\sqrt{2})^3 - m(4 - 2\sqrt{2})^2 + 24(4 - 2\sqrt{2}) - 2m + 4 = 0$$

이 식을 정리하면

$$(260 - 26m) - (160 - 16m)\sqrt{2} = 0$$

무리수가 서로 같은 조건에 의하여

$$260 - 26m = 0, 160 - 16m = 0$$

따라서, $m = 10$

계수가 유리수인 방정식이므로 $4 - 2\sqrt{2}$ 가 근이면 $4 + 2\sqrt{2}$ 도 근이다.

나머지 한 근을 α 라고 하면 근과 계수와의 관계에서

$$(4 + 2\sqrt{2}) + (4 - 2\sqrt{2}) + \alpha = m \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$(4 + 2\sqrt{2})(4 - 2\sqrt{2})\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \alpha = m - 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } 8\alpha = 2m - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉢} \text{을 } \textcircled{㉣} \text{에 대입하면 } 8(m - 8) = 2m - 4$$

$$\therefore m = 10$$

3. 삼차방정식 $x^3 + ax + 16 = 0$ 이 중근 α 와 다른 실근 β 를 가질 때, 상수 a 의 값은?

- ① -12 ② -14 ③ -16 ④ -18 ⑤ -20

해설

이차항의 계수가 0 이므로 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \alpha + \beta = 0, \beta = -2\alpha$$

$$\alpha \times \alpha \times \beta = -16 \text{에서}$$

$$-2\alpha^3 = -16, \alpha = 2, \beta = -4$$

다시 근과 계수와의 관계에 의해

$$\text{일차항의 계수} = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha = a$$

$$\therefore a = -12$$

4. 다음을 읽고 물음에 답하여라.

삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)에서 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 라 두고 $x = 1 + 2i$ 를 대입하면 $f(1 + 2i) = (1 + 2i)^3 + a(1 + 2i)^2 + b(1 + 2i) + c = 0$ 이 된다. 이것을 전개하여 정리하면 $(-11 - 3a + b + c) + (-2 + 4a + 2b)i = 0$ a, b, c 가 실수이므로 이제 $x = 1 - 2i$ 를 대입하면 $f(1 - 2i) = (1 - 2i)^3 + a(1 - 2i)^2 + b(1 - 2i) + c = (-11 - 3a + b + c) - (-2 + 4a + 2b)i = 0$ 따라서 ((가))

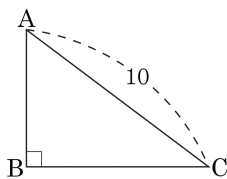
(가)에 들어갈 말로 가장 알맞는 것을 고르면?

- ① 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 + 2i$ 이면, $1 - 2i$ 도 근임을 알 수 있다.
- ② 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 - 2i$ 이면, $1 + 2i$ 도 근임을 알 수 있다.
- ③ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 + 2i$ 라고 해서, 반드시 $1 - 2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
- ④ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)의 한 근이 $1 - 2i$ 라고 해서, 반드시 $1 + 2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
- ⑤ 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 는 실수)은 반드시 하나의 실근을 가진다.

해설

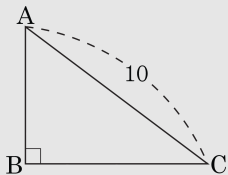
$x = 1 + 2i$ 를 대입한 결과와 $x = 1 - 2i$ 를 대입한 결과가 같다.

5. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



- ① 48 ② 40 ③ 32
④ 18 ⑤ 12

해설



$$\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$$

둘레의 길이가 24 이므로

$$24 = a + b + 10$$

$$a + b = 14$$

직각삼각형이므로,

$$a^2 + b^2 = 10^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$ab = \frac{1}{2} \{ (a + b)^2 - (a^2 + b^2) \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ 14^2 - 10^2 \} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$$

6. $xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 을 만족하는 양의 정수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$xy - 3x - 3y + 4 = 0$ 에서

$x(y - 3) - 3(y - 3) - 5 = 0, (x - 3)y - 3 = 5$

$x \geq 1, y \geq 1$ 이므로 $x - 3 \geq -2, y - 3 \geq -2$

(i) $x - 3 = 1, y - 3 = 5$ 일 때, $x = 4, y = 8$

(ii) $x - 3 = 5, y - 3 = 1$ 일 때, $x = 8, y = 4$

따라서, 구하는 값은 $x + y = 4 + 8 = 8 + 4 = 12$

7. 연립부등식 $\begin{cases} 4x - a < 5 \\ 2(3 - x) \leq 7 \end{cases}$ 의 해가 없을 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a \leq -7$

해설

$$2(3 - x) \leq 7$$

$$6 - 2x \leq 7$$

$$-2x \leq 1$$

$$\therefore x \geq -\frac{1}{2}$$

$$4x - a < 5$$

$$\therefore x < \frac{a+5}{4}$$

해가 없으려면 $\frac{a+5}{4} \leq -\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $a+5 \leq -2$ 이므로 $a \leq -7$ 이다.

8. 부등식 $|-x+3|+|2x-3|\leq 6$ 의 해가 $\alpha\geq x\geq\beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

① -4

② 0

③ 6

④ 12

⑤ 16

해설

$$|-x+3|+|2x-3|\leq 6$$

$$\text{i) } x\leq \frac{3}{2}$$

$$-x+3-2x+3\leq 6, \quad x\geq 0$$

$$\therefore 0\leq x\leq \frac{3}{2}$$

$$\text{ii) } \frac{3}{2}<x\leq 3$$

$$-x+3+2x-3\leq 6, \quad x\leq 6$$

$$\therefore \frac{3}{2}<x\leq 3$$

$$\text{iii) } x>3$$

$$x-3+2x-3\leq 6, \quad x\leq 4$$

$$\therefore 3<x\leq 4$$

$$\therefore 0\leq x\leq 4, \quad \alpha\beta=0$$

9. 이차부등식 $(x+1)^2 \leq k(x^2 - x + 1)$ 이 모든 실수 x 에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

$$(x+1)^2 \leq k(x^2 - x + 1)$$

$$(k-1)x^2 - (k+2)x + k-1 \geq 0$$

모든 x 에 대해 성립하려면,

$k-1 > 0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$$D = (k+2)^2 - 4(k-1)(k-1) \leq 0 \text{에서}$$

$$\{(k+2) - 2(k-1)\}\{(k+2) + 2(k-1)\}$$

$$= (-k+4)k \leq 0$$

$$\therefore k(k-4) \geq 0, \quad k \leq 0 \text{ 또는 } k \geq 4$$

$$\therefore k \geq 4 (\because k > 1) \quad \therefore \text{최솟값: } 4$$

10. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $\frac{1}{2} < x < 1$ 일 때, $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $1 < x < 3$

② $1 < x < 2$

③ $x < 1$ 또는 $x > 2$

④ $x < 1$ 또는 $x > 3$

⑤ $x < -1$ 또는 $x > 3$

해설

해가 $\frac{1}{2} < x < 1$ 이므로 a 는 음수이다

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow ax^2 - \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2}a > 0$$

$$\therefore b = -\frac{3}{2}a, \quad c = \frac{1}{2}a$$

$cx^2 + bx + a < 0$ 에 대입하면

$$\frac{1}{2}ax^2 - \frac{3}{2}ax + a < 0$$

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$(x - 1)(x - 2) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 2$$

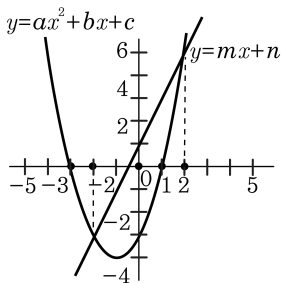
11. 일차함수 $y = mx + n$ 과 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같다.

연립이차부등식

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases}$$

$x < \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

의 해가 $\alpha <$



① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ ax^2 + bx + c < mx + n \end{cases} \quad \text{에서 위의 식의 근은 } -3 < x < 1,$$

아래 식의 근은 $-2 < x < 2$ 이다.

따라서 공통범위는 $-2 < x < 1$ 이다. $-2 \times 1 = -2$

12. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.



답 :

개

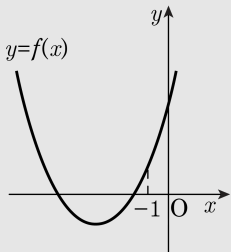


정답 : 3개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면

방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



$$(i) \quad \frac{D}{4} = (-k)^2 - (6 - k) > 0 \text{ 에서}$$

$$k^2 + k - 6 > 0, (k + 3)(k - 2) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 2$$

$$(ii) \quad f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0 \text{ 에서 } k > -7$$

$$(iii) \quad -\frac{2k}{2} < -1 \text{ 에서 } k < -1$$

이상에서 $-7 < k < -1$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, -4$ 의 3개다.

13. 세 점 $A(a, 7)$, $B(1, a)$, $C(5, 2a)$ 와 선분 BC 의 중점 M에 대하여 $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = 22$ 일 때, 정수 a 의 값은?

① 1

② 2

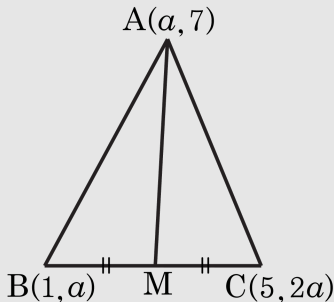
③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$\triangle ABC$ 를 그리면 다음과 같다.



이때, $\triangle ABC$ 에서 중선정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) = 2 \cdot 22 = 44$$

따라서

$$\{(1-a)^2 + (a-7)^2\} + \{(5-a)^2 + (2a-7)^2\} = 44$$

$$(2a^2 - 16a + 50) + (5a^2 - 38a + 74) = 44$$

$$7a^2 - 54a + 80 = 0$$

$$(a-2)(7a-40) = 0$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{40}{7}$$

이 때, a 는 정수이므로 $a = 2$

14. 다음 두 직선 $y = (2a + 1)x - a + 2$, $y = (a + 2)x + 2$ 가 서로 수직일 때, a 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

▷ 정답 : $-\frac{3}{2}$ 또는 -1.5

해설

$$(2a + 1)(a + 2) = -1$$

$$2a^2 + 5a + 3 = 0$$

$$(2a + 3)(a + 1) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } -\frac{3}{2}$$

15. 두 직선 $3x + 4y = 24$ 와 $3x + 4y = 4$ 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 직선이 평행하므로 한 직선의 임의의 점과 나머지 직선 사이의 거리를 구하면 된다.

$3x + 4y = 24$ 의 점 $(0, 6)$

$$\frac{|0 \times 3 + 6 \times 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

16. 직선 $x + 2y - 1 = 0$ 에 수직이고 원점에서의 거리가 $\sqrt{5}$ 인 직선의 방정식은?

- ① $y - 2x = -5$ ② $y - 2x = -\sqrt{5}$ ③ $y + 2x = 5$
④ $y + 2x = \sqrt{5}$ ⑤ $y + 2x = -\sqrt{5}$

해설

구하는 직선의 기울기를 m' 라 하면

$$-\frac{1}{2}m' = -1 \text{ 에서 } m' = 2$$

따라서, 구하는 직선의 식은

$$y = 2x + n, \quad 2x - y + n = 0$$

원점에서 이 직선까지의 거리

$$d = \frac{|n|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5},$$

$$|n| = 5, \quad n = \pm 5$$

$\therefore$ 구하는 직선의 식 : $y = 2x + 5$ 또는 $y = 2x - 5$

17. $a < 0$ 이고 $a + b = 0$ 일 때, 부등식 $(a - b)x - a - 2b < 0$ 의 해는?

① $x < -\frac{1}{2}$

② $x > -\frac{1}{2}$

③ $x > 2$

④ $x < -2$

⑤ $x > 1$

해설

$a + b = 0$ 에서 $b = -a$ 를 부등식에 대입하면

$$(a + a)x - a + 2a < 0, \quad 2ax + a < 0, \quad 2ax < -a$$

$$\therefore x > -\frac{1}{2} (\because 2a < 0)$$

18. 연립부등식
$$\begin{cases} 1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2 \\ 3 - \frac{x-2}{4} < \frac{2x-3}{2} \\ 0.9x \leq 6 \end{cases}$$
 의 해가 $a < x \leq b$ 일 때, $a - b$

의 값을 구하면?

① -9

② -5

③ -2

④ 2

⑤ 9

해설

i) $1.2x - 2 \leq 0.8x + 3.2$,

$0.4x \leq 5.2$, $x \leq 13$

ii) $3 - \frac{x-2}{4} < \frac{2x-3}{2}$ 의 양변에 4 를 곱하면 $12 - (x-2) <$

$2(2x-3)$, $x > 4$

iii) $0.9x \leq 6$

$\frac{9}{9}x \leq 6$

$x \leq 6$

$\therefore 4 < x \leq 6$

19. 부등식 $\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} \leq x - \frac{x+2}{3} \leq \frac{1}{4}x + 6$ 을 만족하는 음이 아닌 정수 x 의 값의 개수는?

- ① 18개 ② 17개 ③ 16개 ④ 3개 ⑤ 2개

해설

$$\text{i) } \frac{1}{2}x - \frac{4}{3} \leq x - \frac{x+2}{3}, 3x - 8 \leq 6x - 2x - 4$$

$$\therefore x \geq -4$$

$$\text{ii) } x - \frac{x+2}{3} \leq \frac{1}{4}x + 6, 12x - 4x - 8 \leq 3x + 72$$

$$\therefore x \leq 16$$

i), ii)에서 공통된 x 의 값의 범위를 구하면

$$-4 \leq x \leq 16$$

한편, x 는 음이 아닌 정수이므로 $0 \leq x \leq 16$

따라서 $x = 0, 1, 2, \dots, 16$ 의 17개이다.

20. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x - 2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

① 1

② 2

③ 3

④ 0

⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여

부등식 $2(kx + 1) > -(x - 2)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$

이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.

①식을 정리하면

$$x^2 + 2(k - 2)x + 5 > 0$$

②식이 항상 성립하기 위하여

$$\frac{D}{4} = (k - 2)^2 - 5 < 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$$

$$\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$$

이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

21. 이차방정식 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 의 두 근이 $-2, 1$ 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \leq 2$

② $-2 < a < 4$

③ $-4 \leq a \leq 2$

④ $\frac{2}{3} < a \leq 4$

⑤ $a \geq 6$

해설

$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$ 으로 놓으면
이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1
사이에 있으므로

(i) $D = a^2 - 4(2a - 3) \geq 0$ 에서
 $a^2 - 8a + 12 \geq 0$, $(a - 2)(a - 6) \geq 0$
 $\therefore a \leq 2$ 또는 $a \geq 6$

(ii) $f(-2) = 4 - 2a + 2a - 3 > 0$ 에서
 $1 > 0$ 이므로 항상 성립한다.

(iii) $f(1) = 1 + a + 2a - 3 > 0$ 에서

$3a > 2 \quad \therefore a > \frac{2}{3}$

(iv) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의
방정식이 $x = -\frac{a}{2}$ 이므로

$-2 < -\frac{a}{2} < 1$

$\therefore -2 < a < 4$

따라서 a 의 값의 범위는 $\frac{2}{3} < a \leq 2$

22. 두 점 $A(1, 4), B(5, 2)$ 에 대하여 점 P 는 x 축 위를 움직이고 점 Q 는 y 축 위를 움직일 때, $\overline{AQ} + \overline{PQ} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

다음 그림과 같이 점 A 를 y 축에 대하여

대칭이동한 점을 A' , 점 B 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면

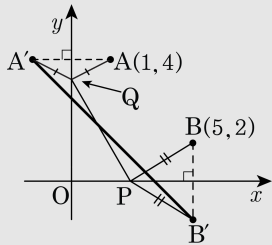
$A'(-1, 4), B'(5, -2)$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{AQ} + \overline{PQ} + \overline{BP} &= \overline{A'Q} + \overline{PQ} + \overline{B'P} \\ &\geq \overline{A'B'}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{(5+1)^2 + (-2-4)^2}$$

$$= \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.



23. 두 점 $A(3, -2)$, $B(-5, 1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점이 제 3 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{3}$
④ $\frac{3}{8} < t < \frac{2}{3}$

② $\frac{1}{3} < t < \frac{1}{2}$
⑤ $\frac{3}{8} < t < \frac{5}{6}$

③ $\frac{1}{3} < t < \frac{2}{3}$

해설

$A(3, -2)$, $B(-5, 1)$ 을 $t : 1-t$ 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{t \cdot (-5) + (1-t) \cdot 3}{t+1-t}, \frac{t \cdot 1 + (1-t) \cdot (-2)}{t+1-t} \right)$$

$$= (-5t + 3 - 3t, t - 2 + 2t) = (-8t + 3, 3t - 2)$$

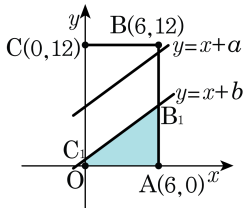
이 점이 제3 사분면에 있으므로

$$-8t + 3 < 0, 8t > 3, t > \frac{3}{8}$$

$$3t - 2 < 0, 3t < 2, t < \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{3}{8} < t < \frac{2}{3}$$

24. 네 점 $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,12)$, $C(0,12)$ 를 꼭지점으로 하는 사각형 $OABC$ 가 있다. 그림과 같이 두 직선 $y = x + a$, $y = x + b$ 가 사각형 $OABC$ 의 넓이를 삼등분할 때, ab 의 값은?



① 4

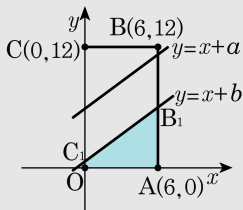
② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설



사각형 $OABC$ 의 넓이가 72이므로
사각형 OAB_1C_1 의 넓이는 24이다.

$$\frac{1}{2}(b + 6 + b) \times 6 = 24 \text{ 이므로 } b = 1$$

같은 방법으로 $a = 5$

$$\therefore ab = 5$$

25. 볼록한 n 각형의 내각 중에서 4 개의 각만 둔각일 때, n 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

볼록 n 각형의 내각의 총합은 $180^\circ(n-2)$ 이다.

4 개의 각만 둔각이므로 모두 90° 보다 크고,

나머지 $(n-4)$ 개의 각이 직각이거나 예각이므로

$$180^\circ(n-2) < 90^\circ(n-4) + 180^\circ \times 4$$

$$2(n-2) < n-4+8$$

$$\therefore n < 8$$

따라서 n 의 최댓값은 7 이다.