

1. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \text{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

2. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을
인수로 갖는다.

따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

1		1	-6	11	-6
			1	-5	6
		1	-4	5	0

$\therefore f(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

$\therefore x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

3. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, k 의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 - 4(-1) + (-1) + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 의 나머지 두 근을 α, β 라 하면

세 근의 합 $4 = -1 + \alpha + \beta$ 에서 $\alpha + \beta = 5$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 11$$

4. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 를 구하여 x^2-y^2 의 값을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12 또는 -12

해설

$$\begin{cases} x-y=2 & \dots \textcircled{1} \\ x^2+y^2=20 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①에서 $y = x - 2$ 를

②식에 대입하면

$$x^2 + (x-2)^2 = 20, 2x^2 - 4x + 4 - 20 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0, (x-4)(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$\therefore x^2 - y^2 = 16 - 4 = 12 \text{ 또는 } x^2 - y^2 = 4 - 16 = -12$$

5. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로

$(t - 1)(t + 4) = 0$ 에서

$t = 1$ 또는 $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$$

6. $|x + 1| < 4$, $2 < y < 4$ 일 때, $\frac{x}{y}$ 의 범위는?

① $-\frac{5}{2} < \frac{x}{y} < \frac{3}{4}$

② $-\frac{3}{2} < \frac{x}{y} < \frac{5}{2}$

③ $-\frac{5}{4} < \frac{x}{y} < \frac{3}{4}$

④ $-\frac{5}{2} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2}$

⑤ $-\frac{3}{2} < \frac{x}{y} < \frac{5}{4}$

해설

$$|x + 1| < 4$$

$$\Rightarrow -4 < x + 1 < 4$$

$$\Rightarrow -5 < x < 3, \quad 2 < y < 4$$

$$\text{취할 수 있는 } \frac{x}{y} \text{ 의 최댓값 : } \frac{3}{2}$$

$$\text{취할 수 있는 } \frac{x}{y} \text{ 의 최솟값 : } -\frac{5}{2}$$

$$\therefore -\frac{5}{2} < \frac{x}{y} < \frac{3}{2}$$

7. x 에 대한 부등식 $ax + b < 0$ 의 해가 $x > -1$ 일 때, 부등식 $(a + b)x + 3a - b > 0$ 의 해를 구하면?

① $x > -1$

② $x < -1$

③ $x > -3$

④ $x < -3$

⑤ $x < 5$

해설

$$ax + b < 0$$

$$ax < -b$$

해가 $x > -1$ 이므로 $a < 0$

$$x > -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{b}{a} = -1 \Rightarrow a = b$$

$$(a + b)x + 3a - b > 0$$

$$2ax + 2a > 0$$

$$2ax > -2a$$

$$x < -1 \quad (\because a < 0)$$

8. 부등식 $x^2 - 2x - 2 < 2|x - 1|$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\beta - \alpha$ 의 값은?

① 0

② -2

③ 2

④ 6

⑤ -6

해설

$x^2 - 2x - 2 < 2|x - 1|$ 에서 구간을 나누어 해를 구한다.

(i) $x \geq 1$ 일 때, $x^2 - 2x - 2 < 2(x - 1)$

$x^2 - 4x < 0$, $x(x - 4) < 0$, $0 < x < 4$

공통범위는 $1 \leq x < 4$

(ii) $x < 1$ 일 때, $x^2 - 2x - 2 < -2(x - 1)$

$x^2 - 4 < 0$, $-2 < x < 2$

공통범위는 $-2 < x < 1$

i + ii : $-2 < x < 4 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$

$\therefore \beta - \alpha = 4 - (-2) = 6$

9. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$ 이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

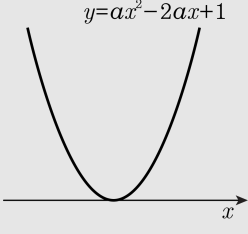
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면

$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$

(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0 \text{ 에서 } a = 0 \text{ 또는 } a = 1$$

(i), (ii)에서 $a = 1$

10. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $x^2 + 2(k-1)x + 3k < 0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값을 구하여라.

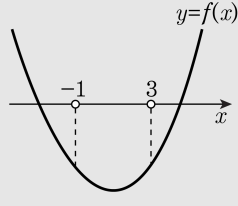
▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.

$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \leq 0$, $f(3) \leq 0$ 이어야 한다.



(i) $f(-1) \leq 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1) \cdot (-1) + 3k \leq 0$, $k+3 \leq 0$
 $\therefore k \leq -3$

(ii) $f(3) \leq 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1) \cdot 3 + 3k \leq 0$, $9k+3 \leq 0$

$\therefore k \leq -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k \leq -3$

따라서, 실수 k 의 최댓값은 -3 이다.

11. 두 점 A(-1, 2), B(3, 0)으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는?

- ① $y = 2x^2 - x$ ② $x^2 + y^2 = 1$ ③ $y = 2x - 1$
④ $y = 2x$ ⑤ $y = x + 1$

해설

구하는 자취 위의 점을 P(x, y) 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 로부터

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $8x - 4y - 4 = 0$

$$\therefore y = 2x - 1$$

12. 두 점 A(-4, 2), B(1, 5)에서 같은 거리에 있고, y축 위에 있는 점 P의 좌표는?

① P(0, -2)

② P(0, -1)

③ P(0, 1)

④ P(0, 2)

⑤ P(0, $\frac{5}{2}$)

해설

점 P의 좌표를 P(0, b)라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 에서

$$(-4-0)^2 + (2-b)^2 = (1-0)^2 + (5-b)^2$$

$$b^2 - 4b + 20 = b^2 - 10b + 26$$

$$6b = 6$$

$$\therefore b = 1$$

따라서 점 P의 좌표는 P(0, 1)이다.

13. 좌표평면 위의 세 점 A(-1, 2), B(x, 0), C(3, 1)에 대하여 $\angle ABC$ 가 직각일 때, 실수 x 의 값의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\triangle ABC$ 는 $\angle B$ 가 직각인 직각삼각형이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이 성립한다.

$$(x+1)^2 + 4 + (x-3)^2 + 1 = 16 + 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의하여 실수 x 의 값의 합은 2이다.

14. 두 점 $A(1, 2), B(3, -2)$ 를 이은 $\overline{AB}$ 의 B 방향으로의 연장선 위에 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 C 의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

점 C 는 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점이므로 $C(5, -6)$ 이다.
 $\therefore a^2 + b^2 = 5^2 + (-6)^2 = 61$

15. 좌표평면 위에 세 점 $A(3, a)$, $B(b, 4)$, $C(a, b)$ 가 있다. 선분 AB를 $3:2$ 로 내분하는 점의 좌표가 $P(b, a+3)$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $(3, 2)$

② $\left(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\right)$

③ $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$

④ $(2, 2)$

⑤ $\left(\frac{5}{3}, 2\right)$

해설

$$\frac{3b+2 \cdot 3}{3+2} = b, \frac{3 \cdot 4+2 \cdot a}{3+2} = a+3 \text{ 이므로,}$$

$$3b+6=5b, 12+2a=5(a+3) \text{ 에서 } a=-1, b=3$$

$$A(3, -1), B(3, 4), C(-1, 3) \text{ 이므로}$$

삼각형 ABC의 무게중심을 $G(x, y)$ 라 하면

$$x = \frac{3+3-1}{3} = \frac{5}{3}, y = \frac{-1+4+3}{3} = 2$$

$$\therefore G\left(\frac{5}{3}, 2\right)$$

16. 점 $P(0, a)$ 에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 2$ 까지의 거리와 점 P 에서 x 축 까지의 거리가 같을 때, 음수 a 의 값은?

- ① $-\frac{3}{4}$ ② -9 ③ $-\frac{4}{9}$ ④ -3 ⑤ -2

해설

점 $P(0, a)$ 와 직선 $4x - 3y + 6 = 0$ 간의 거리는 $\frac{|-3a + 6|}{5}$ 이고,

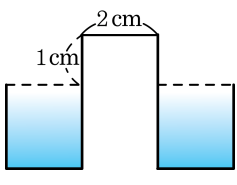
점 $P(0, a)$ 와 x 축간의 거리는 y 좌표의 절대값인 $|a|$ 이므로,

$$|-3a + 6| = 5|a|, \quad -3a + 6 = \pm 5a$$

$$\therefore a = \frac{3}{4} \text{ 또는 } -3$$

$$\therefore a = -3 \quad (\because a < 0)$$

17. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부러서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



- ① 125 cm^2 ② 288 cm^2 ③ 350 cm^2
 ④ 420 cm^2 ⑤ 120 cm^2

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a , 가로 길이를 b 라 하면
 총길이는 $a + b + a + 1 + 2 + a + 1 + b + a = 100$ 에서
 $4a + 2b = 96$
 $\therefore 2a + b = 48$ 이므로 $b = 48 - 2a$
 한 개 단면의 넓이는 ab 이므로
 $a(48 - 2a) = -2a^2 + 48a$
 $= -2(a^2 - 24a)$
 $= -2(a^2 + 24a + 144 - 144)$
 $= -2(a - 12)^2 + 288$
 따라서 $a = 12$ 일 때 최대 넓이 288 cm^2

18. 두 부등식 $3x - 4 < x + 6$ 과 $1 - 3x \leq -5$ 를 모두 만족하는 수 중에서 가장 작은 정수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$3x - 4 < x + 6, \quad x < 5$$

$$1 - 3x \leq -5, \quad 2 \leq x < 5$$

따라서 모두 만족하는 수는 $2 \leq x < 5$ 이므로 가장 작은 정수는 2이다.

19. 일의 자리 숫자가 십의 자리 숫자보다 5 만큼 큰 두 자리 자연수가 있다. 이 자연수가 27 보다 크고 38 이하라고 한다. 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 38

해설

십의 자리 숫자를 a 라 하면 일의 자리 숫자는 $a + 5$ 이다.
즉 두 자리 자연수는 $10a + (a + 5) = 11a + 5$ 이다.

$$27 < 11a + 5 \leq 38$$

$$22 < 11a \leq 33$$

$$2 < a \leq 3$$

a 는 자연수이므로 3 이다. 따라서 두 자리 자연수는 38 이다.

20. 150 개의 배를 바구니에 담는데 한 바구니에 담을 때 10 개씩 담으면 배가 남게 되고, 11 개씩 담게 되면 마지막 바구니를 다 채우지 못한다. 이 때, 바구니의 개수는 몇 개인가?

▶ 답: 개

▶ 정답 : 14개

해설

문제에서 구하고자 하는 바꾸니의 개수를 x 라고 놓자.
 10 개씩 모든 바꾸니를 채우면 배의 개수는 $10x$ 이고, 11 개씩 모든 바꾸니를 채우면 배의 개수는 $11x$ 이다. 그러나 배의 개수가 10 개씩 채운 개수보다 많고 11 개씩 채운 개수보다는 적으므로 이를 식으로 나타내면 $10x < 150 < 11x$ 이다.

이를 연립부등식으로 표현하면 $\begin{cases} 10x < 150 \\ 11x > 150 \end{cases}$ 이고, 간단히 하

면, $\begin{cases} x < 15 \\ x > \frac{150}{11} \end{cases}$ 이다. 이를 다시 나타내면 $\frac{150}{11} < x < 15$ 이다.

$\frac{150}{11} = 13.6363 \dots$ 이므로, 바구니의 개수는 14 개이다.

21. x 에 대한 이차함수 $y = (a - 3)x^2 - 2(a - 3)x + 3$ 의 값이 모든 실수 x 에 대하여 항상 양이 되는 실수 a 의 값의 집합을 A라 하고, 항상 음이 되는 실수 a 의 값의 집합을 B라 할 때, $A \cup B$ 는?

- ① $\{a \mid a < 6\}$
- ② $\{a \mid a \leq 6\}$
- ③ $\{a \mid 3 < a < 6\}$
- ④ $\{a \mid 3 \leq a \leq 6\}$
- ⑤ $\{a \mid a > 3\}$

해설

$y = (a - 3)x^2 - 2(a - 3)x + 3$ 이 이차함수이므로 $a \neq 3$ 이 때, 이차방정식 $(a - 3)x^2 - 2(a - 3)x + 3 = 0$ 의 판별식을 D라 하자.

(i) 항상 양일 경우
모든 실수 x 에 대하여 항상 $y > 0$ 이라면 $a - 3 > 0$, 즉 $a > 3$ 이고

$$\frac{D}{4} = (a - 3)^2 - 3(a - 3) < 0$$
$$(a - 3)(a - 3 - 3) < 0, (a - 3)(a - 6) < 0$$
$$\therefore 3 < a < 6$$
$$\therefore A = \{a \mid 3 < a < 6\}$$

(ii) 항상 음일 경우
모든 실수 x 에 대하여 항상 $y < 0$ 이라면 $a - 3 < 0$, 즉 $a < 3$ 이고

$$\frac{D}{4} = (a - 3)^2 - 3(a - 3) < 0$$
$$(a - 3)(a - 3 - 3) < 0, (a - 3)(a - 6) < 0$$
$$\therefore 3 < a < 6$$
$$\therefore B = \emptyset$$

(i), (ii)에서 $A \cup B = \{a \mid 3 < a < 6\}$

22. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$

② $-2 < x < 3$

③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$

④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$

⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$$

$$\therefore a = -4$$

$$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$$

$$\therefore b = -8$$

$$x^2 - 4x - 8 < 0$$

$$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$$

23. 두 점 A(3, 2), B(a, b)를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 의 교점은 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이다. 이 때, $3a + b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3} = 2, b-2 = 2(a-3), b = 2a-4 \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{AB}$ 를 2 : 1로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1 \cdot 3}{2+1}, \frac{2b+1 \cdot 2}{2+1} \right) = \left(\frac{2a+3}{3}, \frac{2b+2}{3} \right) \text{ 이고}$$

이 점은 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3} + 2 \cdot \frac{2b+2}{3} - 3 = 0$$

$$\therefore a + 2b - 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = \frac{9}{5}, b = -\frac{2}{5}$ 이다.

$$\therefore 3a + b = 5$$

24. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 와 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설

직선의 방정식 $ax + by + c + k(a'x + b'y + c') = 0$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 두 직선 $ax + by + c = 0$ 과 $a'x + b'y + c' = 0$ 의 교점을 지난다.

그림과 같이 직선 $kx - y + 2k - 1 = 0$ 즉 $y = k(x + 2) - 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점 $(-2, -1)$ 을 지나므로 이 직선이 $\overline{AB}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3 = k(1 + 2) - 1, \quad k = \frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1 = k(3 + 2) - 1, \quad k = \frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$\therefore \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{3}$

25. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x - 3y + 2 = 0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

- i. l 과 l' 은 만나지 않는다.

ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l, l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $AB = \sqrt{13}$ 이다.

iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

- ① $2x - 3y + 15 = 0$

② $2x - 3y - 13 = 0$

③ $2x - 3y - 11 = 0$

④ $3x + 2y + 11 = 0$

⑤ $3x + 2y + 13 = 0$

해설

- i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
 $l' : 2x - 3y + c = 0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $AB = \sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1, 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.
즉, $\frac{|-2 + c|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \sqrt{13}, |-2 + c| = 13$
 $-2 + c = \pm 13 \quad \therefore c = 15$ 또는 $c = -11$
 $\therefore l' : 2x - 3y + 15 = 0$ 또는 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

iii. l' 의 y 절편 $5, -\frac{11}{3}$ 중에서
 l 의 y 절편 $\frac{2}{3}$ 보다 작은 것은
 $-\frac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선
 l' 의 방정식은 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$