1. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots \quad$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots \quad$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$
$\therefore \quad ab=2$

2. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 1$

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\
 & & 1 & -5 & 6 \\
\hline
 & 1 & -4 & 5 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$\therefore\ f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

3. 삼차방정식 $x^3-4x^2+x+k=0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x=-1$을 대입하면

$(-1)^3-4-1+k=0 \quad \therefore k=6$

$x^3-4x^2+x+6=0$의 나머지 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

세 근의 합 $4=-1+\alpha+\beta$에서 $\alpha+\beta=5$

$\therefore k+\alpha+\beta=11$

4. $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y를 구하여 x^2-y^2의 값을 모두 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 12 또는 -12

해설

$\begin{cases} x-y=2 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=20 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-2$를

㉡식에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=20$, $2x^2-4x+4-20=0$,

$x^2-2x-8=0$, $(x-4)(x+2)=0$

$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$

$\therefore\ x^2-y^2=16-4=12$ 또는 $x^2-y^2=4-16=-12$

5. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-4 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2+3t-4=0$ 의 두 근이므로
$(t-1)(t+4)=0$ 에서
$t=1$ 또는 $t=-4$
따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$$

$\therefore\ 1+(-4)+(-4)+1=-6$

6. $|x+1|<4,\ 2<y<4$일 때, $\dfrac{x}{y}$의 범위는?

① $-\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{4}$ ② $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{5}{2}$ ③ $-\dfrac{5}{4}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{4}$

④ $-\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{2}$ ⑤ $-\dfrac{3}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{5}{4}$

해설

$|x+1|<4$

$\Rightarrow\quad -4<x+1<4$

$\Rightarrow\quad -5<x<3,\quad 2<y<4$

취할 수 있는 $\dfrac{x}{y}$의 최댓값 : $\dfrac{3}{2}$

취할 수 있는 $\dfrac{x}{y}$의 최솟값 : $-\dfrac{5}{2}$

$\therefore\quad -\dfrac{5}{2}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{3}{2}$

7. x에 대한 부등식 $ax+b<0$의 해가 $x>-1$일 때, 부등식 $(a+b)x+3a-b>0$의 해를 구하면?

① $x>-1$　② $x<-1$　③ $x>-3$

④ $x<-3$　⑤ $x<5$

해설

$ax+b<0$

$ax<-b$

해가 $x>-1$이므로 $a<0$

$x>-\frac{b}{a}$

$\Rightarrow \ -\frac{b}{a}=-1 \ \Rightarrow \ a=b$

$(a+b)x+3a-b>0$

$2ax+2a>0$

$2ax>-2a$

$x<-1$ ($\because$ $a<0$)

8. 부등식 $x^2-2x-2<2|x-1|$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 0 ② -2 ③ 2 ④ 6 ⑤ -6

해설

$x^2-2x-2<2|x-1|$에서 구간을 나누어 해를 구한다.

(i) $x\geq 1$일 때, $x^2-2x-2<2(x-1)$

$x^2-4x<0,\ x(x-4)<0,\ 0<x<4$

공통범위는 $1\leq x<4$

(ii) $x<1$일 때, $x^2-2x-2<-2(x-1)$

$x^2-4<0,\ -2<x<2$

공통범위는 $-2<x<1$

i + ii : $-2<x<4 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$

$\therefore \beta-\alpha=4-(-2)=6$

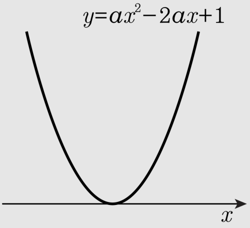
9. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \le 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$

(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$

(i), (ii) 에서 $a = 1$

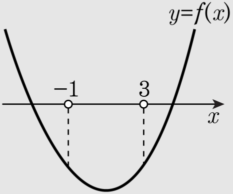
10. $-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k<0$ 이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x)=x^2+2(k-1)x+3k$ 라 하자.
$-1<x<3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1)\le 0,\ f(3)\le 0$이어야 한다.



(i) $f(-1)\le 0$ 에서 $(-1)^2+2(k-1)\cdot(-1)+3k\le 0,\ k+3\le 0$
$\therefore k\le -3$

(ii) $f(3)\le 0$ 에서 $3^2+2(k-1)\cdot 3+3k\le 0,\ 9k+3\le 0$
$\therefore k\le -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k\le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

11. 두 정점 $A(-1,\ 2)$, $B(3,\ 0)$으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는?

① $y = 2x^2 - x$ ② $x^2 + y^2 = 1$ ③ $y = 2x - 1$

④ $y = 2x$ ⑤ $y = x + 1$

해설

구하는 자취 위의 점을 $P(x,\ y)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 로부터

$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $8x - 4y - 4 = 0$

$\therefore\ y = 2x - 1$

12. 두 점 A$(-4,\ 2)$, B$(1,\ 5)$에서 같은 거리에 있고, y축 위에 있는 점 P의 좌표는?

① P$(0,\ -2)$ ② P$(0,\ -1)$ ③ P$(0,\ 1)$
④ P$(0,\ 2)$ ⑤ P$\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$

해설

점 P의 좌표를 P$(0,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(-4-0)^2+(2-b)^2=(1-0)^2+(5-b)^2$

$b^2-4b+20=b^2-10b+26$

$6b=6$

$\therefore\ b=1$

따라서 점 P의 좌표는 P$(0,\ 1)$이다.

13. 좌표평면 위의 세 점 $A(-1,\ 2)$, $B(x,\ 0)$, $C(3,\ 1)$에 대하여 $\angle ABC$가 직각일 때, 실수 x의 값의 합은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\triangle ABC$는 $\angle B$가 직각인 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$이 성립한다.
$(x+1)^2 + 4 + (x-3)^2 + 1 = 16 + 1$
$x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의하여 실수 x의 값의 합은 2이다.

14. 두 점 $A(1,\ 2), B(3, -2)$ 를 이은 $\overline{AB}$ 의 B 방향으로의 연장선 위에 $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 1$ 을 만족하는 점 C 의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 61

해설

점 C 는 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점이므로 $C(5, -6)$ 이다.

$\therefore\ a^2 + b^2 = 5^2 + (-6)^2 = 61$

15. 좌표평면 위에 세 점 $A(3,\ a)$, $B(b,\ 4)$, $C(a,\ b)$가 있다. 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표가 $P(b,\ a+3)$일 때, △ABC의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $(3,\ 2)$ ② $\left(\frac{4}{3},\ \frac{3}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$

④ $(2,\ 2)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$

해설

$\frac{3b+2\cdot 3}{3+2}=b,\ \frac{3\cdot 4+2\cdot a}{3+2}=a+3$ 이므로,

$3b+6=5b,\ 12+2a=5(a+3)$ 에서 $a=-1,\ b=3$

$A(3,\ -1),\ B(3,\ 4),\ C(-1,\ 3)$ 이므로

삼각형 ABC 의 무게중심을 $G(x,\ y)$ 라 하면

$x=\frac{3+3-1}{3}=\frac{5}{3},\ y=\frac{-1+4+3}{3}=2$

$\therefore\ G\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$

16. 점 $P(0, a)$ 에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 2$ 까지의 거리와 점 P 에서 x 축 까지의 거리가 같을 때, 음수 a 의값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② -9 ③ $-\frac{4}{9}$ ④ -3 ⑤ -2

해설

점$P(0,\ a)$ 와 직선 $4x-3y+6=0$ 간의 거리는 $\frac{|-3a+6|}{5}$ 이고,

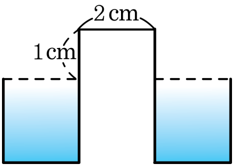
점$P(0,\ a)$ 와 x 축간의 거리는 y 좌표의 절대값인 $|a|$ 이므로,

$|-3a+6| = 5|a|$, $-3a+6 = \pm 5a$

$\therefore\ a = \frac{3}{4}$ 또는 -3

$\therefore\ a = -3\ \ (\because\ a < 0)$

17. 폭이 100 cm 인 긴 양철판을 구부려서 두 줄기로 물이 흘러가도록 하였다. 직사각형 단면이 다음 그림과 같이 대칭인 모양으로 물이 가장 많이 흘러갈 수 있도록 했을 때, 물이 흘러가는 단면 중 한 개 단면의 최대 넓이는 몇 cm^2 인가? (단, 아래 그림의 실선은 양철판을 나타낸다.)



① $125\,cm^2$　② $288\,cm^2$　③ $350\,cm^2$

④ $420\,cm^2$　⑤ $120\,cm^2$

해설

직사각형 단면의 세로의 길이를 a, 가로의 길이를 b 라 하면

총길이는 $a+b+a+1+2+a+1+b+a=100$ 에서

$4a+2b=96$

$\therefore 2a+b=48$ 이므로 $b=48-2a$

한 개 단면의 넓이는 ab 이므로

$$\begin{aligned} a(48-2a) &= -2a^2+48a \\ &= -2(a^2-24a) \\ &= -2(a^2+24a+144-144) \\ &= -2(a-12)^2+288 \end{aligned}$$

따라서 $a=12$ 일 때 최대 넓이 $288\,cm^2$

18. 두 부등식 $3x - 4 < x + 6$ 과 $1 - 3x \leq -5$를 모두 만족하는 수 중에서 가장 작은 정수는?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$3x - 4 < x + 6,\ \ x < 5$

$1 - 3x \leq -5,\ \ 2 \leq x < 5$

따라서 모두 만족하는 수는 $2 \leq x < 5$이므로 가장 작은 정수는 2 이다.

19. 일의 자리 숫자가 십의 자리 숫자보다 5 만큼 큰 두 자리 자연수가 있다. 이 자연수가 27 보다 크고 38 이하라고 한다. 두 자리 자연수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 38

해설

십의 자리 숫자를 a 라 하면 일의 자리 숫자는 $a+5$ 이다.
즉 두 자리 자연수는 $10a+(a+5)=11a+5$ 이다.

$$27 < 11a+5 \leq 38$$

$$22 < 11a \leq 33$$

$$2 < a \leq 3$$

a 는 자연수이므로 3 이다. 따라서 두 자리 자연수는 38 이다.

20. 150 개의 배를 바구니에 담는데 한 바구니에 담을 때 10 개씩 담으면 배가 남게 되고, 11 개씩 담게 되면 마지막 바구니를 다 채우지 못한다. 이 때, 바구니의 개수는 몇 개인가?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 14 개

해설

문제에서 구하고자 하는 바구니의 개수를 x 라고 놓자.
10 개씩 모든 바구니를 채우면 배의 개수는 $10x$ 이고, 11 개씩 모든 바구니를 채우면 배의 개수는 $11x$ 이다. 그러나 배의 개수가 10 개씩 채운 개수보다 많고 11 개씩 채운 개수보다는 적으므로 이를 식으로 나타내면 $10x < 150 < 11x$ 이다.

이를 연립부등식으로 표현하면 $\begin{cases} 10x < 150 \\ 11x > 150 \end{cases}$ 이고, 간단히 하면, $\begin{cases} x < 15 \\ x > \dfrac{150}{11} \end{cases}$ 이다. 이를 다시 나타내면 $\dfrac{150}{11} < x < 15$ 이다.

$\dfrac{150}{11} = 13.6363\cdots$ 이므로, 바구니의 개수는 14 개이다.

21. x에 대한 이차함수 $y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$의 값이 모든 실수 x에 대하여 항상 양이 되는 실수 a의 값의 집합을 A라 하고, 항상 음이 되는 실수 a의 값의 집합을 B라 할 때, $A\cup B$는?

① $\{a \mid a<6\}$ ② $\{a \mid a\le 6\}$ ③ $\{a \mid 3<a<6\}$
④ $\{a \mid 3\le a\le 6\}$ ⑤ $\{a \mid a>3\}$

해설

$y=(a-3)x^2-2(a-3)x+3$이 이차함수이므로 $a\neq 3$
이 때, 이차방정식 $(a-3)x^2-2(a-3)x+3=0$의 판별식을 D라 하자.
(i) 항상 양일 경우
모든 실수 x에 대하여 항상 $y>0$이려면 $a-3>0$, 즉 $a>3$이고

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$$

$(a-3)(a-3-3)<0$, $(a-3)(a-6)<0$
$\therefore 3<a<6$
$\therefore A=\{a \mid 3<a<6\}$
(ii) 항상 음일 경우
모든 실수 x에 대하여 항상 $y<0$이려면 $a-3<0$, 즉 $a<3$이고

$$\frac{D}{4}=(a-3)^2-3(a-3)<0$$

$(a-3)(a-3-3)<0$, $(a-3)(a-6)<0$
$\therefore 3<a<6$
$\therefore B=\varnothing$
(i), (ii)에서 $A\cup B=\{a \mid 3<a<6\}$

22. 이차부등식 $x^2 + ax + b < 0$ 을 풀 때, 근우는 b 를 잘못보고 풀어서 $1 < x < 3$ 이라는 해를 얻었고, 기원이는 a 를 잘못보고 풀어서 $-2 < x < 4$ 이라는 해를 얻었다. 이 부등식의 옳은 해는?

① $-1 < x < 2$
② $-2 < x < 3$
③ $2 - 2\sqrt{5} < x < 2 + 2\sqrt{5}$
④ $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}$
⑤ $2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

해설

$1 < x < 3 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 0$

$\therefore a = -4$

$-2 < x < 4 \Leftrightarrow (x+2)(x-4) < 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 < 0$

$\therefore b = -8$

$x^2 - 4x - 8 < 0$

$\therefore 2 - 2\sqrt{3} < x < 2 + 2\sqrt{3}$

23. 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$를 지나는 직선의 기울기가 2이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$의 교점은 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB의 기울기는 2이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4\cdots ㉠$$

$\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$$

$\therefore a+2b-1=0\cdots ㉡$

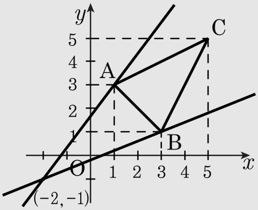
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

24. 세 점 A(1, 3), B(3, 1), C(5, 5) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle$ABC 와 직선 $kx-y+2k-1=0$ 이 만난다. 상수 k 의 최대값을 M , 최소값을 m 이라 할 때, $\frac{M}{m}$ 의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{10}{3}$

해설



직선의 방정식 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ 은

k 의 값에 관계없이 항상 두 직선

$ax+by+c=0$ 과 $a'x+b'y+c'=0$

의 교점을 지난다.

그림과 같이 직선 $kx-y+2k-1=0$

즉 $y=k(x+2)-1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 점$(-2,\ -1)$ 을 지나므로

이 직선이 $\overline{\mathrm{AB}}$ 와 만날 때, 삼각형과 만난다.

1) 점 A 를 지날 때, $3=k(1+2)-1$, $k=\frac{4}{3}$

2) 점 B 를 지날 때, $1=k(3+2)-1$, $k=\frac{2}{5}$

따라서 $\frac{2}{5}\le k\le\frac{4}{3}$ 일 때, 주어진 직선은 삼각형과 만난다.

$$\therefore\ \frac{M}{m}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}}=\frac{10}{3}$$

25. 좌표평면 위의 직선 $l : 2x - 3y + 2 = 0$ 에 대하여 다음 세 조건을 만족시키는 직선 l' 의 방정식은?

i. l 과 l' 은 만나지 않는다.
ii. 직선 l 에 수직인 직선이 l , l' 과 만나는 점을 각각 A, B 라고 하면 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{13}$ 이다.
iii. l' 의 y 절편은 l 의 y 절편보다 작다.

① $2x - 3y + 15 = 0$　② $2x - 3y - 13 = 0$
③ $2x - 3y - 11 = 0$　④ $3x + 2y + 11 = 0$
⑤ $3x + 2y + 13 = 0$

해설

i. l 과 l' 은 만나지 않으므로 서로 평행하다.
서로 평행하면 기울기가 같으므로
$l' : 2x - 3y + c = 0$ 으로 놓을 수 있다.

ii. $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{13}$ 은
평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리가 $\sqrt{13}$ 임을 뜻하므로
직선 l 위의 한 점 $(-1,\ 0)$ 에서 직선 l' 에 이르는 거리가 $\sqrt{13}$ 이다.

즉, $\dfrac{|-2+c|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \sqrt{13}$, $|-2+c| = 13$

$-2 + c = \pm 13 \quad \therefore\ c = 15$ 또는 $c = -11$

$\therefore\ l' : 2x - 3y + 15 = 0$ 또는 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$

iii. l' 의 y 절편 $5,\ -\dfrac{11}{3}$ 중에서
l 의 y 절편 $\dfrac{2}{3}$ 보다 작은 것은
$-\dfrac{11}{3}$ 이므로 구하는 직선
l' 의 방정식은 $l' : 2x - 3y - 11 = 0$