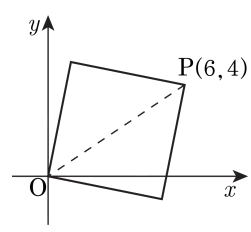


1. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?

- ① 16 ② 20 ③ 26
④ 32 ⑤ 52



해설

$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a 라고 하면
 $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

2. 두 점 A(-1, -2), B(2, 4) 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 1 : 2 로 내분하는 점을 P, 1 : 2 로 외분하는 점을 Q 라고 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

내분점, 외분점 구하는 공식을 이용한다.

$$P = \left(\frac{1 \times 2 + 2 \times (-1)}{3}, \frac{1 \times 4 + 2 \times (-2)}{3} \right) = (0, 0)$$

$$Q = \left(\frac{1 \times 2 - 2 \times (-1)}{1 - 2}, \frac{1 \times 4 - 2 \times (-2)}{1 - 2} \right) = (-4, -8)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

3. $\triangle ABC$ 의 세 꼭짓점의 좌표가 A $(-1, -2)$, B $(2, 5)$, C $(7, 3)$ 으로 주어질 때, 각 변의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는?

- ① $G\left(\frac{4}{3}, 1\right)$ ② $G\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ③ $G\left(2, \frac{8}{3}\right)$
 ④ $G\left(\frac{8}{3}, 1\right)$ ⑤ $G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$

해설

세 변의 중점의 좌표를 각각 구하면

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{9}{2}, 4\right), \left(3, \frac{1}{2}\right)$$

구하고자 하는 무게중심의 좌표를 G (x, y) 라 하면

$$x = \frac{\frac{1}{2} + \frac{9}{2} + 3}{3}, y = \frac{\frac{3}{2} + 4 + \frac{1}{2}}{3}$$

$$\therefore x = \frac{8}{3}, y = 2$$

$$\therefore G\left(\frac{8}{3}, 2\right)$$

4. 세 점 A(1, 2), B(2, -3), C(4, 5)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 에 대하여 점 A를 지나고, $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식은?

① $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ② $y = \frac{1}{2}x + 5$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

해설

점 A를 지나고 $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하려면
직선이 $\overline{BC}$ 의 중점을 지나야 한다.

$\overline{BC}$ 의 중점은 $\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+5}{2}\right)$, 즉 (3, 1) 이므로

두 점 (1, 2), (3, 1)을 지나는 직선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{1-2}{3-1}(x-1)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

5. 세 점 P (−1, −1), Q (1, 1), R (0, 1)을 지나는 원의 방정식을 구하면?

- ① $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$
- ② $x^2 + y^2 - 2x + 3y - 4 = 0$
- ③ $x^2 + y^2 + x - 4y - 5 = 0$
- ④ $x^2 + y^2 + 3x - y - 1 = 0$
- ⑤ $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 2 = 0$

해설

구하는 원의 방정식을 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 으로 놓으면
이 원이 세 점 P (−1, −1), Q (1, 1), R (0, 1) 을 지나므로
이 점을 차례로 대입하면
 $(-1)^2 + (-1)^2 + A \cdot (-1) + B \cdot (-1) + C = 0$
 $\therefore A + B - C = 2 \cdots \textcircled{1}$
 $1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C = 0$
 $\therefore A + B + C = -2 \cdots \textcircled{2}$
 $0^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C = 0$
 $\therefore B + C = -1 \cdots \textcircled{3}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면
 $A = -1, B = 1, C = -2$
따라서, 구하는 원의 방정식은
 $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$

6. A(-2, 3), B(4, 3)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① (-2, 0)

② (-1, 0)

③ (0, 0)

④ (1, 0)

⑤ (2, 0)

해설

점 P를 $(\alpha, 0)$ 이라 하자.

$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(\alpha + 2)^2 + (0 - 3)^2 = (\alpha - 4)^2 + (0 - 3)^2$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\therefore P = (1, 0)$$

7. 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 A(1, 6), B(2, -1)에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

- ① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{12}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

$$\begin{aligned} (a, b) \text{가 } y = x \text{ 위에 있으므로 } b &= a \\ \sqrt{(a-1)^2 + (a-6)^2} &= \sqrt{(a-2)^2 + (a+1)^2} \\ (a-1)^2 + (a-6)^2 &= (a-2)^2 + (a+1)^2 \\ -2a + 1 - 12a + 36 &= -4a + 4 + 2a + 1 \\ -12a &= -32 \\ \therefore a &= \frac{8}{3} \\ \therefore a + b = a + a &= \frac{8}{3} \times 2 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

8. 세 점 $A(2, -3)$, $B(-1, 0)$, $C(1, 2)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인가?

- ① 정삼각형
- ② $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 이등변삼각형
- ③ $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형
- ④ $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
- ⑤ $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 26 = \overline{AC}^2$ 이므로
 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

9. 두 점 A(2, -1), B(6, 3) 에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, △OPQ의 외심의 좌표를 (x, y)라 할 때, x + y의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P(a, 0), Q(0, b)라 하면

$$(2-a)^2 + (-1-0)^2 = (6-a)^2 + (3-0)^2 \cdots \textcircled{A}$$

$$(2-0)^2 + (-1-b)^2 = (6-0)^2 + (3-b)^2 \cdots \textcircled{B}$$

①에서 $a = 5$, ②에서 $b = 5$

△OPQ의 외심을 (x, y)라 하면

$$x^2 + y^2 = (x-5)^2 + y^2 = x^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore -10x + 25 = 0, -10y + 25 = 0$$

$$\therefore x = y = \frac{5}{2}$$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\therefore x + y = 5$$

10. $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ 일 때, 평행사변형 $OABC$ 의 넓이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

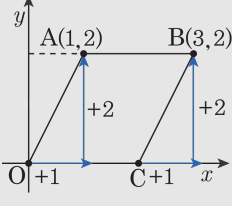
$\overline{OA} \parallel \overline{CB}$, $\overline{OA} = \overline{CB}$ 이

점 A는 점 O를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
점 B도 점 C를 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

$\therefore C = (2, 0)$

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$



11. 세 점 $O(0,0)$, $A(3,6)$, $B(6,3)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAP 의 넓이가 삼각형 OBP 의 넓이의 2배일 때, $a-b$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

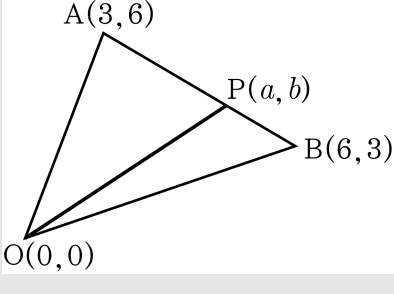
다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 넓이가 같으므로 $\triangle OAP = 2\triangle OBP$ 이려면

P 는 두 점 A, B 를 $2:1$ 로 내분하여야 한다.

따라서 $P\left(\frac{12+3}{3}, \frac{6+6}{3}\right)$

즉 $P(5,4)$ 이므로 $a=5, b=4$

$\therefore a-b=1$



12. 두 점 A(1, 5), B(5, 3)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점 P의 좌표는?
- ① (4, 5) ② (3, 4) ③ (2, 3)
- ④ (1, 2) ⑤ (0, 1)

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되기 위한 점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 P(3, 4)

해설

P(x, y)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= \{(x-1)^2 + (y-5)^2\} \\ &\quad + \{(x-5)^2 + (y-3)^2\} \\ &= 2x^2 - 12x + 2y^2 - 16y + 60 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 - 8y + 16) + 10 \\ &= 2(x-3)^2 + 2(y-4)^2 + 10\end{aligned}$$

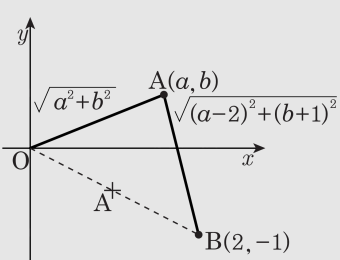
따라서 $x = 3$, $y = 4$ 일 때 최솟값을 갖는다.

13. 좌표평면 위에 점 $O(0, 0)$, $A(a, b)$, $B(2, -1)$ 이 있다. 이때, $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$\sqrt{a^2 + b^2}$ 은 $\overline{OA}$ 의 길이이고,
 $\sqrt{(a-2)^2 + (b+1)^2}$ 은 $\overline{AB}$ 의 길이이다.
 따라서, 준 식은 O, A, B 가 일
 직선상에 있을 때
 최소가 된다. (그림 참조)
 따라서, $\overline{OA} + \overline{AB}$ 의 최솟값은
 $\overline{OB} = \sqrt{5}$



14. 세 직선 $l_1 : ax+y+2=0$, $l_2 : bx-3y-3=0$, $l_3 : (b+2)x+y-2=0$ 이 있다. l_1 과 l_2 가 서로 수직이고 l_1 과 l_3 가 서로 평행할 때, a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

l_1 과 l_2 가 서로 수직이므로
두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.

$$(-a) \cdot \frac{b}{3} = -1, \quad \therefore ab = 3 \cdots \textcircled{1}$$

l_1 과 l_3 가 서로 평행하므로
두 직선의 기울기는 같다.

$$-a = -b - 2, \quad \therefore a - b = 2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 이용하면

$$a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab = 4 + 6 = 10$$

15. 직선 $(5+3k)x+(k-2)y-4k-3=0$ 은 k 의 값에 관계없이 한 정점을 지난다. 그 점의 좌표는?

- ㉠ (1, 1) ㉡ (1, 0) ㉢ (3, 1)
㉣ (-1, -3) ㉤ (3, 0)

해설

주어진 직선의 방정식의 좌변을 k 에 대하여

정리하면 $(3x+y-4)k+5x-2y-3=0$

이 식이 k 에 값에 관계없이 성립하려면

$3x+y-4=0$, $5x-2y-3=0$

이 두 식을 연립해서 풀면 $x=1$, $y=1$

즉, k 의 값에 관계없이 점(1, 1)을 지난다.

16. 두 직선 $3x - 3y - 6 = 0$, $x - y - 4 = 0$ 사이의 거리는?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

해설

평행한 두 직선 사이 거리는 항상 일정하므로
두 직선 중 한 직선 위의 점을 잡고 다른 직선까지의 거리를
구하면 된다.

즉, $3x - 3y - 6 = 0$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서

$x - y - 4 = 0$ 에 이르는 거리를 구하면 된다.

$$\text{거리}는 d = \frac{|1 \times 3 - 1 \times 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

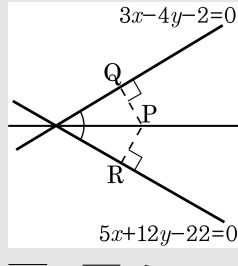
17. 두 직선 $3x-4y-2=0$, $5x+12y-22=0$ 이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식 중에서 기울기가 양인 직선이 $ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

구하는 각의 이등분선 위의 임의의 점 $P(X, Y)$ 에 대하여 P에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각 Q,R이라 하면



$\overline{PQ} = \overline{PR}$ 이므로

$$\frac{|3X-4Y-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|5X+12Y-22|}{\sqrt{25+144}}$$

$$13(3X-4Y-2) = \pm 5(5X+12Y-22)$$

$$\text{즉, } 13(3X-4Y-2) = 5(5X+12Y-22) \text{ 또는}$$

$$13(3X-4Y-2) = -5(5X+12Y-22) \text{ 정리하면}$$

$$x-8y+6=0 \text{ 또는 } 8x+y-17=0 \text{ 에서}$$

기울기가 양이므로

$$\therefore x-8y+6=0$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

18. 점 Q가 직선 $2x + y - 4 = 0$ 위를 움직일 때, 점 A(-2, 3)과 Q를 잇는 선분 AQ의 중점 P의 자취의 방정식은?

- ① $4x + 2y - 3 = 0$
- ② $2x + 3y + 1 = 0$
- ③ $4x - 3y + 1 = 0$
- ④ $x - 4y - 3 = 0$
- ⑤ $-x + y + 2 = 0$

해설

점 A(-2, 3), Q(x, y)의 중점의 좌표를
P(X, Y)라 하면,
 $P(X, Y) = P\left(\frac{x-2}{2}, \frac{y+3}{2}\right)$ 이므로
 $X = \frac{x-2}{2}, Y = \frac{y+3}{2}$
 $\therefore x = 2X + 2, y = 2Y - 3$
이것을 $2x + y - 4 = 0$ 에 대입하면
 $2(2X + 2) + (2Y - 3) - 4 = 0$
 $4X + 2Y - 3 = 0$
 $\therefore 4x + 2y - 3 = 0$

19. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심
사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

20. 두 원 $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 6x = 0$ 의 두 교점과 점(0, 1) 을 지나는 원의 중심의 좌표를 구하면?

① (1, 0)

② $\left(\frac{9}{8}, 0\right)$

③ $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

④ $\left(\frac{9}{5}, 0\right)$

⑤ $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 4 + k(x^2 + y^2 - 6x) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

①은 (0, 1) 을 지나므로 대입하면 $1 - 4 + k = 0$

$$\therefore k = 3 \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하여 정리하면

$$4x^2 + 4y^2 - 18x - 4 = 0$$

$$\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{97}{16}$$

원의 중심은 $\left(\frac{9}{4}, 0\right)$

21. 직선 $y = x + n$ 과 원 $x^2 + y^2 = 8$ 이 만나지 않도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $(0, 0)$ 에서 직선 $y = x + n$ 까지의 거리가
반지름의 길이 $2\sqrt{2}$ 보다 크면 된다.

$$\frac{|n|}{\sqrt{2}} > 2\sqrt{2}$$

$\therefore n > 4$ ($\because n$ 은 자연수)

$\therefore$ 최소의 n 은 5이다.

22. 원 $x^2 + y^2 = 2$ 와 직선 $y = -x + k$ 이 한점에서 만나도록 하는 k 값은?(단, $k < 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -2$

해설

원이 직선과 한 점에서 만나려면,
즉 겹치려면 원의 중심과 직선사이 거리가
반지름과 같아야 한다.

⇒ 중심 : $(0, 0)$ 직선 : $x + y - k = 0$

$$\frac{|1 \times 0 + 1 \times 0 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{2}$$

⇒ $k = \pm 2$

∴ $k = -2$ ($\because k < 0$)

23. 직선 $y = -3x + 12$ 와 원 $x^2 + (y - 2)^2 = 20$ 의 교점의 좌표를 구하면?

- ① $(1, 2), (3, 5)$ ② $(2, 6), (4, 0)$ ③ $(3, 5), (3, 4)$
④ $(4, 6), (2, 3)$ ⑤ $(5, 5), (3, 3)$

해설

$y = -3x + 12 \dots\dots\dots \textcircled{1}$
 $x^2 + (y - 2)^2 = 20 \dots\dots\dots \textcircled{2}$ 에서
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $x^2 + (-3x + 10)^2 = 20, x^2 - 6x + 8 = 0,$
 $(x - 2)(x - 4) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 4$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $x = 2$ 일 때 $y = 6,$
 $x = 4$ 일 때 $y = 0$ 이므로
구하는 교점의 좌표는 $(2, 6), (4, 0)$

24. 점 $(1, 3)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 에 접선을 그을 때 접선의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

원의 중심과 점 $(1, 3)$ 사이의 거리는 $\sqrt{10}$ 이므로
피타고라스의 정리에 의해 접선의 길이는 $\sqrt{10 - 1} = 3$

25. 두 점 A(3, 2), B(6, 5)에 대하여 $2\overline{AP} = \overline{BP}$ 를 만족시키는 점을 P라 할 때, 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은?

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$2\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } 4\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓으면

$$4\{(x-3)^2 + (y-2)^2\} = (x-6)^2 + (y-5)^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 = 8$$

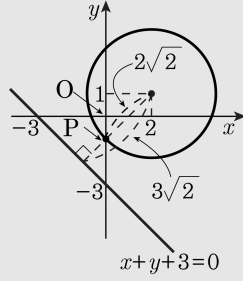
따라서 점 P는 중심이 (2, 1)이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원을 움직인다.

이때, 원의 중심 (2, 1)과 직선 $x+y+3=0$

$$\text{사이의 거리는 } \frac{|2+1+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

아래 그림에서 점 P와 직선 $x+y+3=0$ 사이의 거리의 최솟값은

$$3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$



26. 좌표평면 위의 두 점 A(8, 0), B(0, 6) 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, 세 상수 a, b, c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

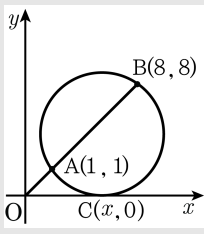
$\angle AOB = 90^\circ$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
 $\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4, 3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
이 식을 정리하면 $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
 $a = -8, b = -6, c = 0$
 $\therefore abc = 0$

27. 좌표평면 위의 두 점 (1, 1), (8, 8) 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{5}{2}$
- ② 3
- ③ $\frac{7}{2}$
- ④ $\frac{11}{2}$
- ⑤ 4

해설

다음 그림에서
 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$
 $\therefore x^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{8^2 + 8^2} = 16$
 $\therefore x = 4$



28. 원 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 과 함수 $y = \frac{3}{2x}$ 의 그래프가 만나는 모든 교점의 x 좌표를 a, b, c, d 라 할 때, $4abcd$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$y = \frac{3}{2x}$ 을 $x^2 + y^2 = \frac{13}{4}$ 에 대입하면

$$x^2 + \frac{9}{4x^2} = \frac{13}{4}$$

$x \neq 0$ 이므로 양변에 $4x^2$ 을 곱하고 정리하면

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = (x^2 - 1)(4x^2 - 9) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1, \pm \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 답은

$$4 \times (-1) \times 1 \times \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \times 4 = 9$$

29. (0, 0), (0, 4), (4, 4)와 (4, 0)을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. (0, 1)에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 (4, 2)에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① (1, 4)

② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 (0, 1)과 (4, 10)을 연결하는 직선과 $y = 4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

30. 두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$ 에서 직선 $2x - y = 0$ 까지의 거리가 같을 때,
 $\frac{2a-b}{a+b}$ 의 값은 ? (단, $ab < 0$)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 점 $(a, 0)$, $(0, b)$ 에서
직선 $2x - y = 0$
까지의 거리가 같으므로,

$$\frac{|2a - 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|0 - b|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$|2a| = |-b|, ab < 0$ 이므로

$$2a = -b, \therefore b = -2a$$

$$\text{따라서, } \frac{2a-b}{a+b} = \frac{2a+2a}{a-2a} = \frac{4a}{-a} = -4$$

31. 두 점 A(-2, 0), B(2, 0) 에서의 거리의 비가 3 : 1 인 점의 자취위의 점 P 라 할 때, △ABP 의 넓이의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

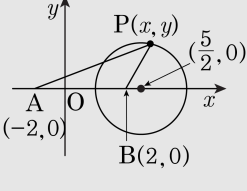
$$\overline{AP} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$
$$\overline{BP} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$$
$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 1 \text{ 이므로}$$
$$\overline{AP} = 3\overline{BP} \rightarrow \overline{AP}^2 = 9\overline{BP}^2$$

따라서, $(x+2)^2 + y^2 = 9(x-2)^2 + 9y^2$

$$\rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9x^2 - 36x + 36 + 9y^2$$
$$\rightarrow 8x^2 + 8y^2 - 40x + 32 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0$$
$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{25}{4} + 4 = 0$$
$$\rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

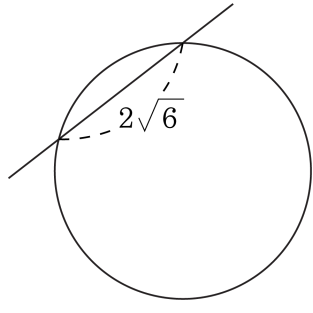
즉, 중심이 $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ 이고

반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ 인 원이다.



$\therefore$ 넓이 S 의 최댓값 $= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3$

32. 원 $x^2 + y^2 = 16$ 이 직선 $l : ax - y - 5(a - 1) = 0$ 에 의하여 잘린 현의 길이가 $2\sqrt{6}$ 일 때, 정수 a 의 값은?



- ① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

원의 중심에서 직선까지 거리
 $\sqrt{4^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{10}$
 $ax - y - 5(a - 1) = 0$ 에서
 $\frac{|-5(a - 1)|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \sqrt{10}$
 $25(a - 1)^2 = 10(a^2 + 1), 15a^2 - 50a + 15 = 0$
 $3a^2 - 10a + 3 = 0$
 $(3a - 1)(a - 3) = 0$
 $\therefore a = 3$

33. 점 $(3, -1)$ 에서 원 $x^2 + y^2 = 5$ 에 그은 두 접선과 y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S 라 할 때, $4S$ 의 값은?

- ① 33 ② 35 ③ 45 ④ 49 ⑤ 55

해설

점 $(3, -1)$ 에서 원에 그은 접선의 방정식을

$y + 1 = m(x - 3)$ 이라 하자.

이 때, 원의 중심에서 직선 $y + 1 = m(x - 3)$,

즉 $mx - y - 3m - 1 = 0$ 에 이르는 거리가 반지름의 길이 $\sqrt{5}$ 와 같으므로

$$\frac{|-3m-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}, |3m+1| = \sqrt{5(m^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면,

$$2m^2 + 3m - 2 = 0, (2m - 1)(m + 2) = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = -2$$

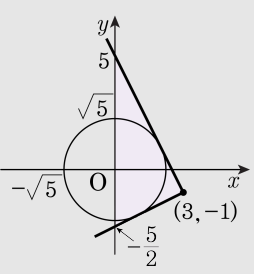
즉, 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}, y = -2x + 5 \text{ 이다.}$$

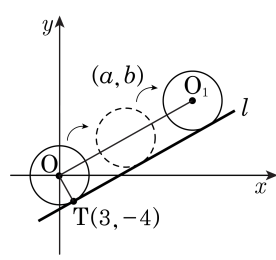
따라서 구하는 삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ 5 - \left(-\frac{5}{2} \right) \right\} \times 3 = \frac{45}{4} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 4S = 45$$



34. 다음 그림과 같이 원점을 중심으로 하는 원 O 가 점 $T(3, -4)$ 에서 직선 l 에 접하고 있다. 직선 l 을 따라 원 O 를 굴려서 생긴 원 O' 의 방정식을 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$ 라 할 때, $\frac{b}{a}$ 의 값은?



- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{3}{4}$
 ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

직선 l 이 점 $T(3, -4)$ 에서 원 O 와 접하므로 직선 OT 과 직선 l 은 수직이다.

이 때, 직선 OT 의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로

직선 l 의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

한 편, 원 O' 의 중심이 (a, b) 이므로

$\frac{b}{a}$ 의 값은 직선 OO' 의 기울기와 같고,

직선 OO' 과 직선 l 은 서로 평행하다.

$\therefore \frac{b}{a} = (\text{직선 } OO' \text{의 기울기}) = (\text{직선 } l \text{의 기울기}) = \frac{3}{4}$

35. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ 위의 임의의 점에서 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 이르는 최단거리는 얼마인지 구하면?

① $\sqrt{2} - 2$

② $2\sqrt{2} - 2$

③ $3\sqrt{2} - 2$

④ $2\sqrt{3} - 2$

⑤ $3\sqrt{2} + 2$

해설

원의 중심과 직선의 거리를 d , 최단거리를 l ,
원의 반지름을 r 이라고 하면
최단거리는 원 중심에서 직선에 이르는
거리에서

원 반지름을 뺀 값과 일치한다.

원의 방정식은 $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

이고,

직선의 방정식은 $y = x + 2$ 이다.

원의 중심은 $(1, -1)$ 이고 $r = 2$ 이므로

$$\therefore l = \frac{|1 + 1 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} - 2 = 2\sqrt{2} - 2$$

