1. 다음 연립부등식을 풀면?

$$2x - 3 < 3x + 1 \le 5x - 3$$

① $x \le 1$ ② $x \ge 2$ ③ $x \ge 1$ ④ $x \le 2$ ⑤ $x \ge 3$

해설

$$\begin{cases} 2x - 3 < 3x + 1 \\ 3x + 1 \le 5x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x \ge 2 \end{cases}$$

$\therefore x \ge 2$

2. y절편이 3이고, 직선 $2x+y-1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $y=-2x+3$ ② $y=-\frac{1}{2}x-3$ ③ $y=-x+3$

④ $y=\frac{1}{2}x-3$ ⑤ $y=\frac{1}{2}x+3$

해설

두 직선이 수직일 조건은
기울기의 곱이 -1일 때이다.
$2x+y-1=0$에서 $y=-2x+1$
구하고자 하는 직선의 방정식을
$y=mx+3$이라면

$m\times(-2)=-1$, $\therefore\ m=\frac{1}{2}$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x+3$

3. 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \ \alpha\beta\gamma=-1$이므로
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot(2)=$
$9-4=5$

4. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

② $\omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$

③ $(1 + \omega^2)^2 = \omega$

④ $(1 + \omega)^{10} = \omega^2$

⑤ $\omega^3 = 1$

해설

$x^3 = 1$

$(x^3 - 1) = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

ω는 $x^2 + x + 1 = 0$의 한 근이다.

$\omega^3 = 1,\ \omega^2 + \omega + 1 = 0 \cdots$ ①

①식을 ω로 나누면

$\omega + \dfrac{1}{\omega} = -1$(○)

③ $(1 + \omega^2)^2 = (-\omega)^2 = \omega^2$(×)

④ $(1 + \omega)^{10} = (-\omega^2)^{10}$

$= \omega^{20}$

$= (\omega^3)^6 \omega^2$

$= \omega^2$ (○)

5. 방정식 $x^2+2x+1+y^2-4y+4=0$을 만족하는 두 실수 x, y의 합 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2+2x+1+y^2-4x+4=0$ 에서

$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

x, y 는 실수이므로 $x=-1$, $y=2$

$\therefore\ x+y=-1+2=1$

6. 연립부등식 $3(2x-1) \leq 2(x+6)$, $2(x+6) \leq 5(x+1)$ 의 해가 모두 자연수일 때, 해를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$A : 3(2x-1) \leq 2(x+6) \Rightarrow \ 6x-3 \leq 2x+12$

$\Rightarrow \ 4x \leq 15 \Rightarrow \ x \leq \dfrac{15}{4}$

$B : 2(x+6) \leq 5(x+1) \Rightarrow \ 2x+12 \leq 5x+5$

$\Rightarrow \ x \geq \dfrac{7}{3}$

$\therefore \dfrac{7}{3} \leq x \leq \dfrac{15}{4}$

x는 자연수이므로 부등식의 해는 3이다.

7. 두 부등식 A는 $0.3x+2>0.5x-1$이고, B는 $\frac{2}{5}x+1.5 \le 0.7x-\frac{1}{2}$일 때, 다음 설명 중 옳은 것을 모두 골라라.

㉠ A와 $x>8$의 공통해는 $x<8$이다. ㉡ B와 $x<30$의 공통해는 $\frac{20}{3} \le x < 30$이다. ㉢ A와 B의 공통해는 $\frac{20}{3} \le x < 15$이다. ㉣ A와 B를 합한 부분은 존재하지 않는다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

해설

A의 부등식의 양변에 10 을 곱하면

$3x+20>5x-10$

$-2x>-30$

$x<15$

B의 부등식의 양변에 10 을 곱하면

$4x+15 \le 7x-5$

$3x \ge 20$

$x \ge \frac{20}{3}$

A와 $x>8$의 공통해는 $8<x<15$, B와 $x<30$의 공통해는 $\frac{20}{3} \le x < 30$이다. A와 B를 합하면 모든 실수이다.

8. 연립부등식 $\begin{cases} x+a \geq 3+2x \\ 3(x-1) \geq 2x-5 \end{cases}$ 를 만족하는 정수 x 의 개수가 5 개 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $5 \leq a < 6$　　② $5 < a \leq 6$　　③ $5 \leq a \leq 6$

④ $6 \leq a < 7$　　⑤ $6 < a \leq 7$

해설

1. $x+a \geq 3+2x$

$x \leq a-3$

2. $3(x-1) \geq 2x-5$

$x \geq -2$

$\therefore \quad -2 \leq x \leq a-3$ 만족하는 정수 x 의 개수가 5 개이므로

$2 \leq a-3 < 3$

$\therefore \quad 5 \leq a < 6$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 7x-4>-3(x-2) \\ 8(x+1)>2x-a \end{cases}$ 의 해가 $x>1$ 일 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $a<-2$　② $a\le -2$　③ $a\ge -14$

④ $a>-14$　⑤ $a\le -14$

해설

(i) $7x-4>-3(x-2)$, $x>1$

(ii) $8(x+1)>2x-a$, $x>\dfrac{-a-8}{6}$

연립부등식의 해가 $x>1$ 이므로

$\dfrac{-(a+8)}{6}\le 1$, $-a-8\le 6$

$\therefore\ a\ge -14$

10. 어떤 정수의 3 배에서 16 을 더하면 1 보다 크고, 이 정수의 4 배에서 5 를 빼면 −13 보다 작다. 이 때, 이러한 정수를 모두 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : −4

▷ 정답 : −3

해설

$$\begin{cases} 3x + 16 > 1 \\ 4x - 5 < -13 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x > -15 \\ 4x < -8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > -5 \\ x < -2 \end{cases}$$

따라서 $-5 < x < -2$ 를 만족하는 정수는 −4, −3 이다.

11. 어떤 삼각형의 세변의 길이가 a, $a+4$, $a+6$ 이라고 할 때, 가능한 a의 범위로 옳은 것은?

① $a<2$　② $a>2$　③ $0<a<2$

④ $0\le a<2$　⑤ $0<a\le 2$

해설

삼각형은 가장 긴 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야 하므로, $a+6<a+(a+4)$
이고 정리하면 $a>2$이다.

12. 모든 실수 x에 대해 이차부등식 $x^2 - x(kx-3)+3 > 0$이 항상 성립하기 위한 정수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 부등식을 정리하면

$(1-k)x^2 + 3x + 3 > 0$

$D = 3^2 - 4 \times (1-k) \times 3 < 0$

$\therefore k < \dfrac{3}{12} = 0.25$

최대 정수 $k = 0$

13. 이차부등식 $ax^2+bx+10<0$의 해가 $x<-2$ 또는 $x>5$일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

해가 $x<-2,\ x>5$이므로, $a<0$이다

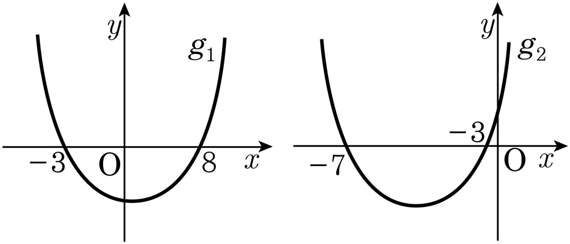
$ax^2+bx+10<0$

$\Leftrightarrow\quad a(x+2)(x-5)<0$

$ax^2-3ax-10a<0$

$\therefore\quad a=-1,\quad b=3,\quad a+b=2$

14. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
g_2 의 일차항 $a = 10$
($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
$x^2 + 10x - 24 < 0,\ (x + 12)(x - 2) < 0$
$\therefore -12 < x < 2$
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

15. 이차함수 $y=-2x^2-2x+1$ 의 그래프가 직선 $y=mx+n$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위가 $-1<x<\frac{3}{2}$ 일 때, 상수 m, n 의 곱 mn 의 값은?

① -6 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

부등식 $-2x^2-2x+1>mx+n$,
즉 $2x^2+(m+2)x+n-1<0$ 의 해가
$-1<x<\frac{3}{2}$ 이므로
방정식 $2x^2+(m+2)x+n-1=0$ 의 해가
$x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$-\frac{m+2}{2}=-1+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{n-1}{2}=(-1)\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$ 이므로
$m=-3$, $n=-2$
$\therefore\ mn=6$

16. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases}$ 의 해 $(x,\ y)$가 제1사분면에 있을 상수 c의 조건은?

① $c = -1$ ② $c > -1$ ③ $c < \dfrac{3}{2}$

④ $0 < c < \dfrac{3}{2}$ ⑤ $-1 < c < \dfrac{3}{2}$

해설

$\begin{cases} x - y = 2 \\ cx + y = 3 \end{cases}$ 을 풀면 $x = \dfrac{5}{c+1}, y = \dfrac{3-2c}{c+1}$

$x > 0, y > 0$ 인 c의 범위를 구한다.

$c + 1 > 0,\quad 3 - 2c > 0$

$\therefore\quad -1 < c < \dfrac{3}{2}$

17. 두 점 $A(-2, -3)$, $B(-5, 4)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하면?

① $(0, -2)$ ② $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ③ $(0, 1)$

④ $(0, 2)$ ⑤ $\left(0, \frac{14}{3}\right)$

해설

P의 좌표를 $(0, \alpha)$라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$이므로

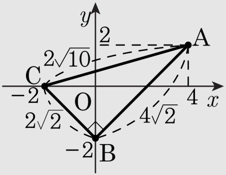
$$\sqrt{(0-(-2))^2 + (\alpha-(-3))^2}$$
$$= \sqrt{(0-(-5))^2 + (\alpha-4))^2}, \ \alpha = 2$$

$\therefore \ P = (0, 2)$

18. 세 점 $A(4,\ 2)$, $B(0,\ -2)$, $C(-2, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② 둔각삼각형
③ $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형
④ $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형
⑤ $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형

해설



$\triangle ABC$ 의 세변의 길이를 구하면

$\overline{AB}$

$= \sqrt{(0-4)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-2-0)^2 + \{0-(-2)\}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (2-0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ 이므로

$\triangle ABC$ 는 $\angle B = 90°$ 인 직각삼각형이다.

19. 세 점 $A(0,0)$, $B(2,4)$, $C(6,6)$에 대해 $\triangle ABC$의 외심의 좌표는?

① $(6,0)$ ② $(6,-1)$ ③ $(7,-1)$

④ $(7,0)$ ⑤ $(8,0)$

해설

외심의 성질 : 삼각형의 세 점에서의 거리가 같다.

외심을 (x,y)라 하면

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \cdots ①$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-6)^2+(y-6)^2} \cdots ②$

①, ②의 양변을 제곱하여 정리하면

$x+2y=5$, $x+y=6$

두 식을 연립하여 풀면 $(x,y)=(7,-1)$

외심이 세 변의 수직이등분선의 교점이라는 것을 이용하여 구할 수도 있다.

20. 원 $x^2+y^2=1$ 과 원 밖의 두 점 A(1, 6), B(5, 2) 가 있다. 원 위를 움직이는 임의의 점 $P(x_1,\ y_1)$ 에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 24 ② 48 ③ 66 ④ 70 ⑤ 96

해설

중선정리를 이용한다.

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{PM}^2+\overline{BM}^2)$

$\overline{BM}^2=8$ 이므로 $\overline{PM}$ 이 최소일 때
$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$ 의 최솟값을 구할 수 있다.

$M\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{6+2}{2}\right)=M(3,\ 4)$ 이므로

$\overline{PM}\geq\overline{OM}-1=4$

따라서 구하는 최솟값은 $2(4^2+8)=48$

21. 좌표평면 위의 세 점 A(3, 3), B(−3, 0), C(3, 0) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 값이 최소가 되는 점을 P$(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$
$= (a-3)^2 + (b-3)^2 + (a+3)^2 + b^2 + (a-3)^2 + b^2$
$= 3(a^2 + b^2 - 2a - 2b + 12)$
$= 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 30$
따라서 $a=1,\ b=1$ 일 때, 최솟값 30 을 갖는다.
$\therefore\ a+b=2$

22. 두 점 $(-1,2),(3,4)$ 를 지나는 직선이 x 축, y 축과 각각 점 A,B 에서 만날 때, 삼각형 OAB 의 넓이는? (단 O 는 원점)

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{25}{4}$ ④ $\frac{24}{5}$ ⑤ $\frac{37}{6}$

해설

두 점 $(-1,2),(3,4)$ 를 지나는 직선의 방정식은 $y-4=\frac{4-2}{3-(-1)}(x-3)$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

$y=0$ 을 대입하면

$0=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}, x=-5$

따라서 x 축과 만나는 점 A 의 좌표는 $\mathrm{A}(-5,0)$

㉠의 y 절편이 $\frac{5}{2}$ 이므로

y 축과 만나는 점 B 의 좌표는 $\mathrm{B}(0,\frac{5}{2})$,

$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$

23. 사차방정식 $x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 해는?

① $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$

② $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

③ $x=\dfrac{-15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

④ $x=\dfrac{15\pm\sqrt{221}}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

⑤ $x=15\pm\sqrt{221}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{3}i$

해설

$x^4+8x^3+17x^2+8x+1=0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2+8x+17+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+8\left(x+\frac{1}{x}\right)+17=0$$

$\therefore x+\dfrac{1}{x}=A$라 하자.

$$A^2+8A+15=(A+3)(A+5)$$

$$=\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\left(x+\frac{1}{x}+5\right)=0$$

$$(x^2+3x+1)(x^2+5x+1)=0$$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2},\ \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$$

24. 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$을 만족시키는 해의 쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 3개　② 4개　③ 5개　④ 6개　⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서
x, y, z를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$$

$$\therefore\ (x, y, z)=$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right), \left(1, -2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right), \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right),$$

$$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

25. 다음 중 옳은 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $a \geq b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$ 의 해는 없다.
㉡ $a \geq b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$ 의 해는 $x > a$ 이다.
㉢ $a > b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$ 의 해는 없다.
㉣ $a < b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x < -a+1 \\ x-1 > -b \end{cases}$ 의 해는 없다.
㉤ $a = b$ 일 때, 연립부등식 $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$ 의 해는 1개이다.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

㉠, ㉡, ㉢, ㉤은 모두 옳다.

㉣ $a < b$ 의 양변에 -1 을 곱하면 $-a > -b$

$-a > -b$ 의 양변에 같은 수 1 을 더하면 $1 - a > 1 - b$

$\begin{cases} x < -a+1 \\ x-1 > -b \end{cases}$ 을 정리하면 $\begin{cases} x < -a+1 \\ x > -b+1 \end{cases}$

그런데 위에서 $1 - b < 1 - a$ 가 성립되었기 때문에 $-b+1 < x < -a+1$ 이 성립한다.

따라서 해가 있다.

26. 연립부등식 $-1.2 < \dfrac{2x-a}{6} < -x$ 의 해가 $\dfrac{2}{5} < x < b$ 일때, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$-1.2 < \dfrac{2x-a}{6} < -x$

$\rightarrow \begin{cases} -7.2 < 2x - a \\ 2x - a < -6x \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x > \dfrac{a-7.2}{2} \\ x < \dfrac{a}{8} \end{cases}$

$\dfrac{a-7.2}{2} < x < \dfrac{a}{8}$ 가 $\dfrac{2}{5} < x < b$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a-7.2}{2} &= \frac{2}{5} \\ 5a - 36 &= 4 \end{aligned}$$

$\therefore\ a = 8$

$\therefore\ b = \dfrac{a}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

27. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① $\times 2+$ ③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because$ b는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\dfrac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because$ a는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

28. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(7, 4)$, $\mathrm{B}(8, 6)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표를 a라 할 때, $5a$의 값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 32

해설

$\mathrm{A}(7,\ 4)$를 $y = x$에 대칭이동한 점 $\mathrm{C}(4,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$가 최소인 점 P는

선분 BC와 직선 $y = x$의 교점이다.

$y = -\frac{1}{4}x + 8$와 $y = x$의 교점은 $\left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$

$\therefore\ 5a = 32$

29. $\triangle$ABC의 꼭짓점 A의 좌표가 $(5, 6)$이고 무게중심 G의 좌표가 $(3, 4)$일 때, 변 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는?

① $(1,\ 2)$　② $(2,\ 5)$　③ $(2,\ 3)$

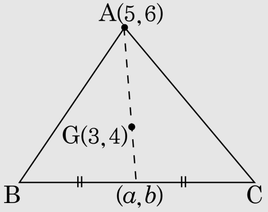
④ $(3,\ 4)$　⑤ $(4,\ 5)$

해설

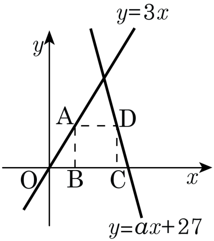
무게중심은 중선을 2 : 1로 내분한다.

$\therefore\ \mathrm{G}\left(\dfrac{2a+5}{2+1},\ \dfrac{2b+6}{2+1}\right) = (3,\ 4)$

$\therefore\ a = 2,\ b = 3$



30. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y=3x$ 의 그래프가 점 A 를 지나고, 일차함수 $y=ax+27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.)



① -4 ② $-\dfrac{9}{2}$ ③ -5

④ $-\dfrac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

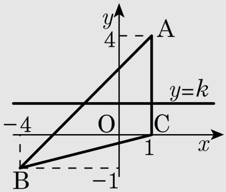
$\overline{\mathrm{AB}}=3$ 이므로 점 A 의 y 좌표는 3 이고,
점 A는 일차함수 $y=3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, $\overline{\mathrm{BC}}=3$ 이므로 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다.
점 C 와 x 좌표가 같고, 점 A 와 y 좌표가 같은 점 D 의 좌표는 $(4,\ 3)$ 이다.
점 D가 일차함수 $y=ax+27$ 위의 점이므로 $x=4$, $y=3$를 대입하면 $3=a\times4+27$
$\therefore\ a=-6$

31. 좌표평면 위의 세 점 $A(1,4)$, $B(-4,-1)$, $C(1,0)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 직선 $y=k$가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $4-\sqrt{5}$ ② $4-\sqrt{6}$ ③ $4-\sqrt{7}$

④ $4-2\sqrt{2}$ ⑤ $4-\sqrt{10}$

해설



$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면, $y=\frac{-1-4}{-4-1}(x-1)+4$

$\Rightarrow \quad y=x+3$

$\therefore \quad y=k$와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 $(k-3,\ k)$, $(1,\ k)$

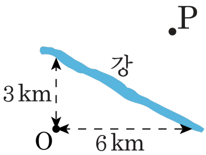
$\Rightarrow$이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

$\frac{1}{2}\times(1-(k-3))\times(4-k)=5$

방정식을 풀면, $k=4\pm\sqrt{10}$

$\therefore \quad k=4-\sqrt{10}\ (\because\ k<4)$

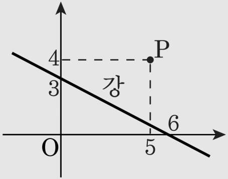
32. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O 로부터 동쪽으로 6 km , 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O 로부터 동쪽으로 5 km , 북쪽으로 4 km 의 위치에 마을 P 가 있다. 이 때, 마을 P 에서 강까지의 최단 거리를 구하시오.(단위는 km)



① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O 를 원점 O 로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.



강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ 즉, $x + 2y - 6 = 0$

이때, 마을 P 의 좌표는 $(5,\ 4)$ 이다.

따라서, 점 $(5,\ 4)$ 에서 직선 $x + 2y - 6 = 0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5+8-6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}(km)$$

33. 세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$2x-y-4=0 \cdots\cdots ㉠$

$3x-4y+9=0 \cdots\cdots ㉡$

$4x+3y+12=0 \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=5,\ y=6$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $x=0,\ y=-4$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $x=-3,\ y=0$

세 직선 $2x-y-4=0$, $3x-4y+9=0$, $4x+3y+12=0$ 으로 이루어지는

삼각형은 세 점 $A(5,\ 6)$, $B(0,-4)$, $C(-3,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 이다.

따라서 점 $(5,\ 6)$ 과 직선 $4x+3y+12=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|4\times5+3\times6+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{|50|}{5}=10$

또, $\overline{BC}=\sqrt{(-3-0)^2+(0+4)^2}=5$

따라서 $\triangle$ABC 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times5\times10=25$

34. 삼차다항식 $f(x)$ 와 이차다항식 $g(x)$ 가 다음의 세 조건을 만족한다.

> (A) $f(x)$ 를 $g(x)$ 로 나누면, 몫이 $x-2$ 이고 나머지가 $x+6$ 이다.
> (B) $f(x)-(x-7)g(x)$ 는 $x+1$ 로 나누어떨어진다.
> (C) 방정식 $g(x)=2x+5$ 의 해는 $-2, 1$ 이다.

이 때, 방정식 $f(x)=0$ 의 실근 중 가장 작은 것을 구하면 ?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(A) 에서 $f(x)=(x-2)g(x)+x+6$ 이므로 $x=-1$ 을 대입하면
$f(-1)=-3g(-1)+5 \cdots\cdots$ ㉠
(B) 에서 $f(-1)+8g(-1)=0 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡를 연립하면,
$f(-1)=8,\ g(-1)=-1 \cdots\cdots$ ㉢
(C) 에서 $g(x)-(2x+5)=0$ 의 해가 $-2,\ 1$ 이므로,
$g(x)-(2x+5)=a(x+2)(x-1)$
$g(x)=a(x+2)(x-1)+2x+5$
㉢에서 $g(-1)=-2a+3=-1$ 이므로 $a=2$
$\therefore\ g(x)=2x^2+4x+1$
$\therefore\ f(x)=(x-2)g(x)+x+6$
$\qquad\quad =2x^3-6x+4=2(x-1)^2(x+2)$
따라서 방정식 $f(x)=0$ 의 실근 중 가장 작은 것은 -2 이다.

35. $3(x^4+y^4+z^4)=2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2+3$을 만족시키는 양의정수 $x,\ y,\ z$의 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

조건식에서

$3(x^4+y^4+z^4-x^2y^2-y^2z^2-z^2x^2)$

$=3-(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\geq 0$

$\therefore\ x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\leq 3$

$\therefore\ xy=yz=zx=1$

$\therefore\ (x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 1)$