1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$
② $1 < k < 3$
③ $k < 3$
④ $3 < k < 5$
⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$

$k^2 - 6k + 5 > 0,\ \ (k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$　② $k > 3,\ k < -1$　③ $k > 1,\ k < -1$
④ $k > 3,\ k < -2$　⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
$-x^2 + kx = x + 1,\ x^2 + (1-k)x + 1 = 0$ 에서
$\mathrm{D} = (1-\mathrm{k})^2 - 4 > 0$
$k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1) > 0$
$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 이차함수 $y = -2x^2 - 4x - 6$의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$y = -2x^2 - 4x - 6$
$= -2(x+1)^2 - 4$
$x = -1$ 일 때, 최댓값 -4를 갖는다.

4. 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 3$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$

최댓값 $m = 1$

$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{3}(x+3)^2$

최솟값 $n = 0$

$\therefore mn = 1 \times 0 = 0$

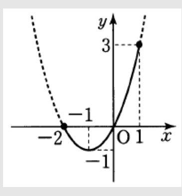
5. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x - 2)(x - 6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

7. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설
주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

8. 직선 $y = 3x + 2$ 와 포물선 $y = x^2 + mx + 3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m < -1, m > 3$ ② $m < 1, m > 5$ ③ $-1 < m < 3$
④ $-1 < m < 5$ ⑤ $1 < m < 5$

해설

$y = 3x + 2, y = x^2 + mx + 3$ 에서 y 를 소거하면
$x^2 + (m-3)x + 1 = 0, D = (m-3)^2 - 4 > 0$
$m^2 - 6m + 5 > 0, (m-1)(m-5) > 0$
$\therefore\ m < 1,\ m > 5$

9. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2　　② 5　　③ 8　　④ 10　　⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

10. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -19

해설

$y = x^2 - 6x - 10 = (x-3)^2 - 19$
$x = 3$ 일 때, 최솟값은 -19 이다.

11. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3　② 7　③ 11　④ −3　⑤ −5

해설

$f(x) = a(x + 1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x + 1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

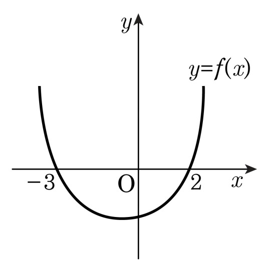
12. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.
$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$
$y = -(x - 9)^2 + 81$
따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3)=0,\ f(2)=0$ 이므로
방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 근은
(i) $x^2-1=-3$ 일 때, $x^2=-2 \quad \therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3 \quad \therefore x=\pm\sqrt{3}$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

14. 이차함수 $y=2x^2+ax+12$의 그래프와 직선 $y=5x+b$가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 $(3,\ 17)$일 때, $a+b$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면
α, β 는 이차방정식 $2x^2+ax+12=5x+b$의 두 실근이다.
$2x^2+(a-5)x+12-b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-\dfrac{a-5}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠
또, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 3이므로
$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=3$에서 $\alpha+\beta=6$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $-\dfrac{a-5}{2}=6$
$\therefore a=-7$
또, 점 $(3,\ 17)$은 직선 $y=5x+b$ 위의 점이므로 $17=5\cdot3+b$ $\therefore$ $b=2$
$\therefore a+b=-7+2=-5$

15. 이차함수 $y = 2x^2 + 4ax - 4a$ 의 최솟값을 m이라고 할 때, m의 최댓값을 구하여라. (단, a는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = 2x^2 + 4ax - 4a = 2(x + a)^2 - 2a^2 - 4a$

$\therefore m = -2a^2 - 4a = -2(a + 1)^2 + 2$

따라서 m의 최댓값은 2 이다.

16. $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 일 때 $x^2 - y^2 + z^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -40

해설

$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+2}{3} = t$ 라 하면

$x = 2t-1$, $y = 5t+3$, $z = 3t-2$ 이므로

$x^2 - y^2 + z^2 = (2t-1)^2 - (5t+3)^2 + (3t-2)^2 = -12t^2 - 46t - 4$

$\cdots$ ㉠

$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로

$t \geq \frac{1}{2}$, $t \geq -\frac{3}{5}$, $t \geq \frac{2}{3}$

$\therefore\ t \geq \frac{2}{3}$

이 범위에서 ㉠은 감소하므로

$t = \frac{2}{3}$ 일 때 최대이고 최댓값은

$-12\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 46 \cdot \frac{2}{3} - 4 = -40$

17. $x^2 + y^2 = 5$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $2x - y$는 $x = \alpha, y = \beta$에서 최댓값 m을 갖는다. 이때, $m + \alpha + \beta$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$2x - y = k$로 놓으면
$y = 2x - k \cdots$ ㉠
㉠을 $x^2 + y^2 = 5$에 대입하면
$x^2 + (2x - k)^2 = 5$
$\therefore 5x^2 - 4kx + k^2 - 5 = 0 \cdots$ ㉡
㉡을 x에 대한 이차방정식으로 보면
x가 실수이므로
$\frac{D}{4} = 4k^2 - 5(k^2 - 5)\ 0$, $k^2 \le 25$
$\therefore -5 \le k \le 5$
따라서 k의 최댓값은 5이다.
이 때의 x, y의 값은
㉡에서 $5x^2 - 20x + 20 = 0$, $5(x - 2)^2 = 0 \therefore x = 2$
㉠에서 $y = 4 - 5 = -1$
따라서, $m = 5, \alpha = 2, \beta = -1$이므로
$m + \alpha + \beta = 6$

18. 둘레의 길이가 24m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면?

① $30\,\mathrm{cm}^2$　② $32\,\mathrm{cm}^2$　③ $34\,\mathrm{cm}^2$
④ $36\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $38\,\mathrm{cm}^2$

해설

가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$, 세로의 길이를 $(24-x)\,\mathrm{m}$, 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36-26) \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 $x=6$ 일 때 넓이의 최댓값은 $36\,\mathrm{m}^2$ 이다.

19. 둘레의 길이가 $24\,\mathrm{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답: ______ cm

▷ 정답: 12 cm

해설

반지름 $x\,\mathrm{cm}$, 호의 길이를 $(24-2x)\,\mathrm{cm}$ 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 $6\,\mathrm{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $36\,\mathrm{cm}^2$ 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24-2x=12\,\mathrm{cm}$ 이다.

20. 이차함수 $y=-x^2+10x-13$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+10x-13=-(x-5)^2+12$

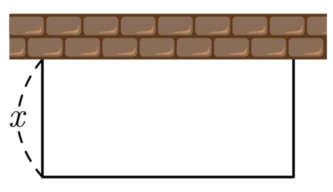
최댓값 $m=12$

$y=\frac{1}{2}x^2+x+1=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}$

최솟값 $n=\frac{1}{2}$

$\therefore mn=12\times\frac{1}{2}=6$

21. 아래 그림과 같이 40 m 인 철망으로 직사각형의 모양의 닭장을 만들려고 한다.
넓이가 최대가 되도록 하는 x 의 값은?

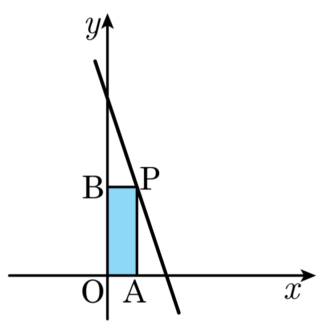


① 6m ② 8m ③ 10m ④ 12m ⑤ 14m

해설

직사각형의 세로의 길이를 x , 가로의 길이를 $20-2x$ 라고 하면,
$y = x(40-2x)$
$= -2x^2 + 40x$
$= -2(x-10)^2 + 200$
$x = 10$ 일 때, 최댓값은 200 이다.

22. 다음 그림과 같이 일차함수 $y=-x+4$ 의 그래프 위의 한 점 P 에서 x 축, y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B 라 할 때, 직사각형 OAPB 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

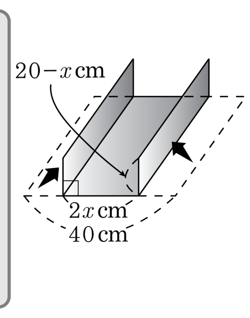
A 의 좌표를 $(t,\ 0)$ 이라고 하면 P 의 좌표는
$(t,\ -t+4)$ 이고 B 의 좌표는$(0,\ -t+4)$
$\therefore \square\mathrm{OAPB}=t\times(-t+4)=-t^2+4t=-(t-2)^2+4$
$t=2$ 일 때, 넓이의 최댓값 4

23. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10　② 8　③ 6　④ 4　⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x)=-2x^2+40x=-2(x^2-20x+200)+100=-2(x-10)^2+200$
$\therefore\ x=10$ 일 때 넓이가 최대이다.



24. 지상 22m 되는 위치에서 초속 30m 로 위로 던져 올린 공의 t 초 후의 높이를 hm 라 하면 $h = -5t^2 + 30t + 22$ 인 관계가 성립한다. 이 공은 몇 초 후에 최고 높이에 도달하는가?

① 1 초 ② 2 초 ③ 3 초 ④ 4 초 ⑤ 5 초

해설

$h = -5(t^2 - 6t + 9 - 9) + 22$
$= -5(t-3)^2 + 67$

$t = 3$ 일 때, 최댓값 $h = 67$

25. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k \geq 3$　　② $k > 4$　　③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$　　⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은
두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의
그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$