1. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + 1$ 의 최댓값과 최솟값을 차례로 구하면?

① 4 , 없다 ② 1 , 없다 ③ -1 , 없다
④ 없다, 4 ⑤ 없다, 1

해설

$y = -3x^2 - 6x + 1 = -3(x^2 + 2x) + 1 = -3(x + 1)^2 + 4$
따라서 최댓값은 4 , 최솟값은 없다.

2. 이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이 $x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가질 때, 상수 $a,\ b$ 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

이차함수 $y = ax^2 + bx - 3$ 이
$x = 2$ 에서 최댓값 5 를 가지므로
$y = a(x-2)^2 + 5 = ax^2 - 4ax + 4a + 5$
위의 식이 $y = ax^2 + bx - 3$ 과 일치하므로
$-4a = b,\ 4a + 5 = -3$
$\therefore a = -2,\ b = 8$
$\therefore a + b = 6$

3. 이차함수 $y=-x^2+10x-13$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y=-x^2+10x-13=-(x-5)^2+12$

최댓값 $m=12$

$y=\frac{1}{2}x^2+x+1=\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{2}$

최솟값 $n=\frac{1}{2}$

$\therefore mn=12\times\frac{1}{2}=6$

4. $-2 \le x \le 3$에서 $y = x^2 - 2x - 2$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① 3　② 7　③ -2　④ 0　⑤ 1

해설

$y = (x-1)^2 - 3$이고 꼭짓점의 x좌표가 주어진 x의 범위에 포함되므로
$x = 1$에서 최솟값을 $x = -2$에서 최댓값을 갖는다.
(최댓값)$=(-2)^2 - 2(-2) - 2 = 6$
(최솟값)$=-3$

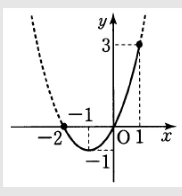
5. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

7. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

8. 직선 $y=3x+2$ 와 포물선 $y=x^2+mx+3$ 이 두 점에서 만나기 위한 실수 m 의 범위를 구하면?

① $m<-1, m>3$ ② $m<1, m>5$ ③ $-1<m<3$
④ $-1<m<5$ ⑤ $1<m<5$

해설

$y=3x+2, y=x^2+mx+3$ 에서 y 를 소거하면
$x^2+(m-3)x+1=0, D=(m-3)^2-4>0$
$m^2-6m+5>0, (m-1)(m-5)>0$
$\therefore\ m<1,\ m>5$

9. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

10. 함수 $y=-x^2+kx$의 그래프가 직선 $y=-x+4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y=-x^2+kx$가 $y=-x+4$에 접하려면
$4-x=-x^2+kx \Rightarrow x^2-(k+1)x+4=0$의 판별식은 $D=0$이어야 한다.
$D=(k+1)^2-16=0 \Rightarrow k+1=\pm 4$
$\therefore k=3$ $(\because k>0)$

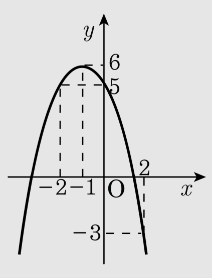
11. 함수 $y=-x^2-2x+5\ (-2\le x\le 2\ )$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

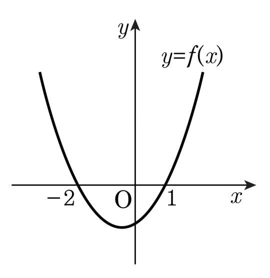
해설

$$y=-x^2-2x+5=-\left(x^2+2x+1-1\right)+5=-(x+1)^2+6$$



점$(-1,6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.
$f(-2)=5, f(2)=-3$
따라서 최댓값은 $x=-1$ 일 때 $f(-1)=6$ 이며
최솟값은 $x=2$ 일 때 $f(2)=-3$ 이다.
$\therefore\ M+m=6-3=3$

12. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?

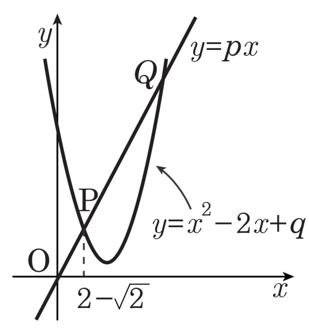


① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y = f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y = f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a = 5$
$\therefore a = -3$

13. 다음 그림과 같이 직선 $y = px$ 와 이차함수 $y = x^2 - 2x + q$ 의 그래프가 두 점 P, Q 에서 만나고 점 P 의 x 좌표가 $2 - \sqrt{2}$ 이다. 이때, 유리수 p, q 의 곱 pq 의 값은?



① 1　　② 4　　③ 6　　④ 9　　⑤ 12

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2x + q = px$ 의 두 실근이다.
$x^2 - (p+2)x + q = 0$ 에서 p, q 는 유리수이므로
한 근이 $2 - \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = p + 2$
$\therefore\ p = 2$
$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = q$
$\therefore\ q = 2$
$\therefore\ pq = 4$

14. x, y, z가 실수일 때, $x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$의 최솟값은?

① -5　② -3　③ -1　④ 1　⑤ 3

해설

$x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25$
$=(x+1)^2+(y-3)^2+(z-4)^2-1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2+y^2+z^2+2x-6y-8z+25 \geq -1$
따라서 $x=-1,\ y=3,\ z=4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

15. 가로의 길이가 6cm , 세로의 길이가 10cm 인 직사각형에서 가로의 길이를 $x$cm 길게 하고 세로의 길이를 $x$cm 짧게 한 직사각형의 넓이가 최대일 때, x 값은?

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 14 ⑤ 15

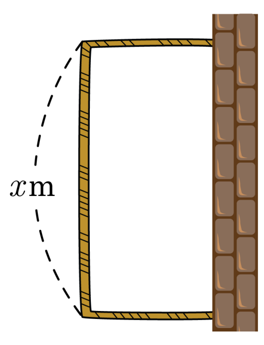
해설

넓이를 y 라 하면

$$\begin{aligned} y &= (6+x)(10-x) \\ &= -x^2 + 4x + 60 \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 60 \\ &= -(x-2)^2 + 64 \end{aligned}$$

따라서 $x = 2$ 일 때 최댓값 64 를 가진다.

16. 다음 그림과 같이 길이 $20\,\text{m}$ 인 철망을 담벽에 ㄷ자 모양으로 둘러싸서 닭장을 만들려고 한다. 이 닭장의 넓이의 최댓값은 얼마인가?



① $70\ \text{m}^2$　② $40\ \text{m}^2$　③ $50\ \text{m}^2$　④ $80\ \text{m}^2$　⑤ $60\ \text{m}^2$

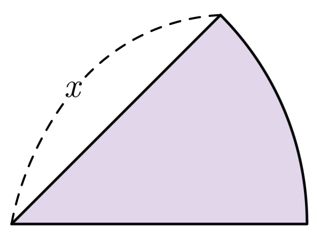
해설

닭장 넓이를 y라 하면

$$\begin{aligned} y &= x\left(\frac{20-x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(-x^2+20x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-20x+100-100) \\ &= -\frac{1}{2}(x-10)^2+50 \end{aligned}$$

$\therefore x=10$ 일 때 최댓값 $50\,\text{m}^2$

17. 둘레의 길이가 12 인 부채꼴에서 반지름의 길이를 x 라 하고, 부채꼴의 넓이를 y 라 할 때, 부채꼴의 넓이를 최대가 되게 할 때, 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

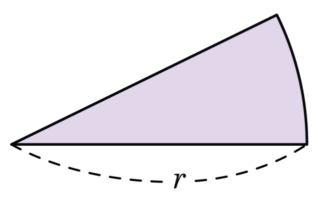
해설

부채꼴의 넓이를 y, 반지름의 길이를 x 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \times x \times (12 - 2x) \\ &= x(6 - x) \\ &= -x^2 + 6x \\ &= -(x^2 - 6x + 9 - 9) \\ &= -(x - 3)^2 + 9 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(3, 9)$ 이므로 반지름의 길이 $x = 3$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 9를 가진다.

18. 둘레의 길이가 20cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때의 반지름의 길이는?



① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

부채꼴의 호의 길이는 $l = (20-2r)\text{cm}$
부채꼴의 넓이를 y라 하면
$y = \frac{1}{2}r(20-2r) = (10-r)r = -(r-5)^2 + 25$
따라서 꼭짓점이 $(5, 25)$ 이므로 반지름의 길이가 $5\,\text{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 25cm^2를 가진다.

19. 지면으로부터 초속 20m 로 위로 던진 공의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 $y = -5x^2 + 20x$ 인 관계가 성립한다. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 지면으로부터의 높이를 구하여라.

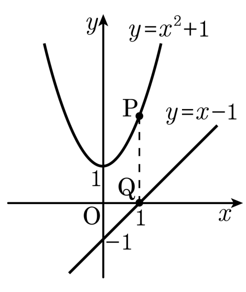
▶ 답: ______ m

▷ 정답: 20 m

해설

$y = -5x^2 + 20x$ 에서 $y = -5(x-2)^2 + 20$ 이다.
따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 20m 이다.

20. 포물선 $y = x^2 + 1$ 위의 한 점P 에서 y 축에 평행인 직선을 그어 직선 $y = x-1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하면?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ $\frac{6}{5}$
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이때, 점 P 의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t,\ t-1)$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}} &= t^2+1-(t-1)\\ &= t^2-t+2\\ &= \left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\end{aligned}$$

따라서 $t=\frac{1}{2}$ 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 $\frac{7}{4}$

21. 두 함수 $f(x) = |x-2|-5$, $g(x) = x^2+6x+8$ 에 대하여 $0 \le x \le 5$ 에서 $y = g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 라고 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = |x-2|-5 = t$ 로 놓으면
$y = g(f(x)) = g(t) = t^2+6t+8 = (t+3)^2-1$
그런데 $0 \le x \le 5$ 에서 $-5 \le t \le -2$ 이므로
y 의 값은 $t=-5$ 일 때 최대이고 최댓값은 3,
$t=-3$ 일 때 최소이고 최솟값은 -1 이다.
$\therefore M=3,\ m=-1$
$\therefore M+m=2$

22. $x+y=3,\ x \ge 0,\ y \ge 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

준식 $y=-x+3$ 에서 $x \ge 0,\ y \ge 0$ 이므로
$y=-x+3 \ge 0 \ \rightarrow\ -x \ge -3 \ \rightarrow\ x \le 3 \therefore\ 0 \le x \le 3\ (\because\ x \ge 0)$
또 $2x^2+y^2=2x^2+(-x+3)^2=2x^2+x^2-6x+9=3x^2-6x+9$
완전 제곱식으로 바꾸면 $3(x^2-2x)+9=3(x-1)^2+6$
$\therefore\ x=1$ 일 때 최솟값 6 , $x=3$ 일 때 최댓값 18 $\therefore\ M-m=12$

23. x 가 실수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}=k$ 라 하면

$x^2+4x-1=k(x^2-2x+3)$

$(k-1)x^2-(2k+4)x+3k+1=0$

$D/4=(k+2)^2-(k-1)(3k+1)\geq 0$

$-2k^2+6k+5\geq 0$

근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은

3 이다.

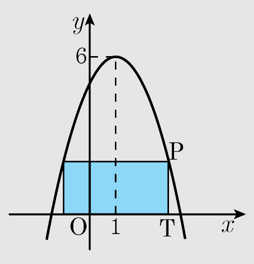
24. 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형에 내접하고, 한 변이 x 축 위에 오는 직사각형을 만들 때, 이 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$y = -x^2 + 2x + 5$ 의 그래프를 그리면 다음과 같다.



포물선 위의 임의의 점 P 의 좌표는
$(t,\ -t^2 + 2t + 5)$ 이다.
직사각형의 가로의 길이는 $2(t-1)$,
직사각형의 세로의 길이는 $-t^2 + 2t + 5$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{둘레의 길이} &= 2[2(t-1) - t^2 + 2t + 5] \\ &= 2(-t^2 + 4t + 3) \\ &= -2t^2 + 8t + 6 \\ &= -2(t-2)^2 + 14 \end{aligned}$$

$t = 2$ 일 때, 최댓값은 14 이다.

25. 어떤 수공예 업자가 만든 수공예품의 원가는 15000 원이다. 시장 조사를 하였더니 정가를 25000 원으로 하면 하루에 200 개를 팔 수 있고, 500 원씩 정가를 내릴 때마다 20 개씩 더 팔 수 있다고 한다. 최대 이윤을 얻으려면 정가를 얼마로 해야 하는가?

① 22500 원　　② 23000 원　　③ 23500 원
④ 24000 원　　⑤ 24500 원

해설

한 개의 이윤을 x 원이라 하면
팔리는 제품의 개수는

$$200 + \frac{10000 - x}{500} \times 20 = 600 - \frac{x}{25}$$

총 이윤을 p 라 하면

$$\begin{aligned} p &= x\left(600 - \frac{x}{25}\right) = -\frac{x^2}{25} + 600x \\ &= -\frac{1}{25}(x^2 - 15000x) \\ &= -\frac{1}{25}(x - 7500)^2 + 2250000 \end{aligned}$$

따라서 한 개의 이윤이 7500 원일 때,
최대 이윤을 얻을 수 있으므로 정가는
$15000 + 7500 = 22500$(원)