1. 이차방정식 $ax^2 + 4x - 2 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 a 값의 범위는?

① $a > -2$　　② $-2 < a < 0,\ a > 0$

③ $-2 < a < 0$　　④ $a > 2$

⑤ $a < 0,\ 0 < a < 2$

해설

$ax^2 + 4x - 2 = 0$에서

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $a \neq 0$이어야 한다.

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4} > 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (-2a) > 0,\ 2a + 4 > 0$$

$\therefore a > -2$

따라서 실수 a값의 범위는

$-2 < a < 0$ 또는 $a > 0$

2. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1$, $x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

-1	1	-3	3	1	-6
		-1	4	7	6
2	1	-4	7	-6	0
		2	-4	6	
	1	-2	3	0	

$(x+1)(x-2)(x^2-2x+3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

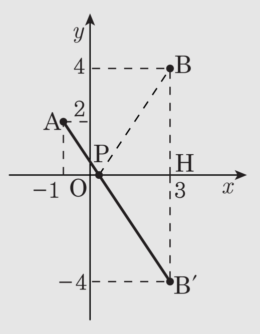
따라서 실수근은 -1, 2이므로 $-1 + 2 = 1$이다.

3. 두 점 A $(-1,\ 2)$, B $(3,\ 4)$ 에 대하여 점 P 가 x축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① $2\sqrt{13}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{41}$ ④ 5 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′ 이라 하면 B′ $(3,\ -4)$
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$
따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최소거리는 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{B'P}}$ 의 최소 거리와 같고
세 점 A, P, B′ 이 직선 위에 있을 때
가장 짧은 $\overline{\mathrm{AB'}}$ 이 최소거리이다.
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB'}}=\sqrt{(3+1)^2+(-4-2)^2}=2\sqrt{13}$



4. x 축 위의 두 점 A$(-4,\ 0)$, B$(12,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 를 $5\ :\ 3$ 으로 내분하는 점을 P, $3\ :\ 7$ 로 외분하는 점을 Q 라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점의 좌표는?

① $(-5,\ 0)$　② $(-4,\ 0)$　③ $(5,\ 0)$
④ $(4,\ 0)$　⑤ $(-1,\ 0)$

해설

그림에서 내분점 P$(x,\ y)$ 는

$$x=\frac{60-12}{5+3}=6,\quad y=\frac{0+0}{5+3}=0$$

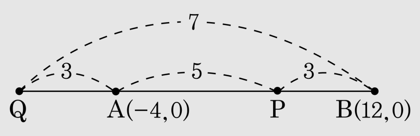
$\therefore$ P$(6,\ 0)$

외분점 Q$(x,\ y)$ 는

$$x=\frac{36+28}{3-7}=\frac{64}{-4}=-16,\ y=0$$

$\therefore$ Q$(-16,\ 0)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 M$\left(\frac{6-16}{2},\ 0\right)=(-5,\ 0)$



5. 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$의 교점을 지나고, 직선 $x+y+1=0$에 수직인 직선의 방정식은?

① $x+y+3=0$ ② $x-y+3=0$ ③ $x+y-3=0$
④ $x-y-3=0$ ⑤ $2x+y+3=0$

해설

두 직선 $5x+2y+1=0$, $2x-y+4=0$ 의
교점을 지나는 직선의 방정식은
$(5x+2y+1)+k(2x-y+4)=0$
$\therefore\ (5+2k)x+(2-k)y+(1+4k)=0 \cdots$ ㉠
이 직선이 $x+y+1=0$ 에 수직이므로
$(-1)\times\dfrac{2k+5}{k-2}=-1$
$\therefore\ k=-7 \cdots$ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 구하는
직선의 방정식은 $x-y+3=0$
(보충)
두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ 의
교점을 지나는 직선은
$ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$

6. 다항식 $f(x)$를 $x-2$, $x+2$로 나누었을 때, 나머지가 각각 5, 3이라 한다. 이 때, 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지를 구하면 $ax+b$이다. $4a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(2)=5,\ f(-2)=3$

$f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$
$\quad=(x-2)(x+2)Q(x)+ax+b$

$f(2)=2a+b=5,\ f(-2)=-2a+b=3$

$a=\frac{1}{2},\ b=4$

7. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 b를 잘못 보아 두 근 $\frac{1}{2}$, 4를 얻었고, c를 잘못 보아 -1, 4의 두 근을 얻었다. 이 때, 옳은 근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

(ⅰ) b를 잘못 본 경우
a와 c는 옳으므로 두 근의 곱은
$\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{c}{a}\quad \therefore\ c=2a$
(ⅱ) c를 잘못 본 경우
a와 b는 옳으므로 두 근의 합은
$-1+4=3=-\frac{b}{a}\quad \therefore\ b=-3a$
(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 방정식은
$ax^2-3ax+2a=0$
$a\neq 0$이므로 $x^2-3x+2=0$
$(x-1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$
따라서 근의 합은 3이다.

8. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 $30°$ 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는 $(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x - \sqrt{3}y + \sqrt{3} + 2 = 0$

$\therefore b = -\sqrt{3},\ c = 2 + \sqrt{3} \quad \therefore\ b + c = 2$

9. 삼각형의 세변의 길이를 $x,\ y,\ z$라 할 때, 이들 사이에 다음의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

$$x^2yz + x^3z - xy^2z + xz^3 - y^3z + yz^3 = 0$$

① x가 빗변인 직각삼각형

② y가 빗변인 직각삼각형

③ z가 빗변인 직각삼각형

④ $x = y$인 이등변삼각형

⑤ $x = y,\ z$가 빗변인 직각삼각형

해설

$(x^2y + x^3 - xy^2 + xz^2 - y^3 + yz^2)z$
$= \{x^2(x+y) + (x+y)z^2 - (x+y)y^2\}z$
$= (x+y)(x^2+z^2-y^2)z$
$\therefore\ (x+y)(x^2+z^2-y^2)z = 0$
$x^2+z^2-y^2 = 0$ ($\because\ x,\ y,\ z$는 모두 양수)
$\therefore\ x^2+z^2 = y^2 \Rightarrow y$가 빗변인 직각삼각형

10. $\alpha = a + bi$ (a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha^t = b + ai$라 한다. $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha^t)^4$을 간단히 하면?

① $1+i$ ② $1-i$ ③ $2+i$
④ $2-i$ ⑤ $\sqrt{3}+i$

해설

$\alpha = a+bi,\ \alpha^t = b+ai$이므로
$\alpha\alpha^t = (a+bi)(b+ai) = (a^2+b^2)i$

그런데 $\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i = a+bi$에서

$a = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ b = \dfrac{1}{2}$ $\quad \therefore\ \alpha\alpha^t = \left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\right)i = i$

$\therefore$ (준식)$= 2\alpha(\alpha\cdot\alpha^t)^4 = 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\cdot i^4 = \sqrt{3}+i$

11. 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$과 다음과 같다고 하자.

$$f(n) \begin{cases} i^{n+1}(n=4k) \\ -i^{n}(n=4k+1)(\text{단,k는정수}) \\ 2i(n=4k+2) \\ -i(n=4k+3) \end{cases}$$

(단,k 는 정수) 이 때, $f(1)+f(2)+\cdot\cdot\cdot+f(2005)$ 를 구하면?

① i　② $-i$　③ 0　④ $500i$　⑤ $501i$

해설

$n=4k \Rightarrow f(n)={}^{4k+1}=i$
$n=4k+1 \;\Rightarrow\; f(n)=-i^{4k+1}=-i$
$n=4k+2 \;\Rightarrow\; f(n)=2\pi$
$n=4k+3 \;\Rightarrow\; f(n)=-i$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-i+2i-i+i=i$
계속 반복되므로
$f(1)+f(2)+\cdots+f(2005)$
$=i\times 501+f(2005)$
$=501i-i=500i$

12. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$ 의 값을 구하면?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$
$2\alpha = -1+\sqrt{3}i$
$2\alpha+1=\sqrt{3}i$
양변을 제곱하여 정리하면
$\alpha^2+\alpha+1=0$
$\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$
$=\alpha(\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha^2+\alpha+1)+4$
$=4$

해설

$\alpha^2+\alpha+1=0$ 을 얻은 후 $\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$ 를 $\alpha^2+\alpha+1$ 로 나누면
$\alpha^3+2\alpha^2+2\alpha+5$
$=(\alpha^2+\alpha+1)(\alpha+1)+4$
$=4\ (\because\ \alpha^2+\alpha+1=0)$

13. 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근 α, β, γ에 대하여 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 일 때, 방정식 $f(2x+3)=0$의 세 근의 합은?

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

세 근의 합은 $\left(-\dfrac{x^2\text{의 계수}}{x^3\text{의 계수}}\right)$이므로
x^3 의 계수와 x^2 의 계수만 구하면 된다.
최고차항의 계수가 1인 삼차방정식을
$f(x)$라 하면 세 근의 합이 3이므로
$f(x)=x^3-3x^2+bx+d$
$f(2x+3)$
$=(2x+3)^3-3\cdot(2x+3)^2+b\cdot(2x+3)+d$
3차항과 2차항의 계수를 중심으로
식을 정리하면
$8x^3+24x^2+\ldots\cdots=0$
$\therefore$세 근의 합$=-3$

해설

$f(2x+3)=0$의 세 근을
각각 $p,\ q,\ r$이라 하면,
$2p+3=\alpha\ \cdots$㉠
$2q+3=\beta\ \cdots$㉡
$2r+3=\gamma\ \cdots$㉢
㉠+㉡+㉢에서
$2(p+q+r)+9=3$
$\therefore\ p+q+r=-3$

14. 두 방정식 $x^2-(k+2)x+2k=0$, $x^2+kx-2k=0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재할 때, 상수 k의 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

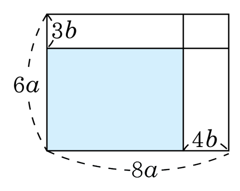
해설

공통인 근을 α라 하면
$\alpha^2-(k+2)\alpha+2k=0$
$\alpha^2+k\alpha-2k=0$
두 식을 더하면
$2\alpha^2-2\alpha=0$, $\alpha(\alpha-1)=0$
$\alpha=0$ 이면 $k=0$
$\alpha=1$ 이면 $k=1$
$\therefore$ $k=1$ 또는 0

해설

㉠ : $x^2-(k+2)x+2k=0$에서 $(x-k)(x-2)=0$
㉡ : $x^2+kx-2k=0$
ⅰ) $x=k$ 가 ㉡의 해일 때
$k^2+k^2-2k=0$,
$k^2-k=0$
$k=1$ 또는 $k=0$
ⅱ) $x=2$가 ㉡의 해일 때
$4+2k-2k=0$, $4=0$ 성립하지 않는다.
$\therefore$ $k=1$ 또는 0

15. 다음 그림에서 색칠한 직사각형의 넓이는?



① $6a^2 - 7ab + 2b^2$

② $36a^2 - 42ab + 12b^2$

③ $48a^2 - 48ab + 12b^2$

④ $12a^2 - 12ab + 3b^2$

⑤ $48a^2 + 48ab + 12b^2$

해설

$(6a - 3b)(8a - 4b) = 48a^2 - 48ab + 12b^2$

16. 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $2x+1$이고, $(x-2)^3$으로 나눈 나머지가 x^2-x+6이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-2)^2$으로 나눈 나머지는?

① $3x+1$ ② $3x-2$ ③ $3x+2$

④ x^2-2x+1 ⑤ x^2-x+6

해설

$f(x)=(x+1)^2A(x)+2x+1$에서 $f(-1)=-1$

$f(x)=(x-2)^3B(x)+x^2-x+6$

$\quad =(x-2)^3B(x)+(x-2)^2+3x+2$

$\quad =(x-2)^2\{(x-2)B(x)+1\}+3x+2$

즉 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 나머지는 $3x+2$

구하는 나머지를 ax^2+bx+c라 하면

$f(x)=(x+1)(x-2)^2Q(x)+ax^2+bx+c$

$\quad =(x+1)(x-2)^2Q(x)+a(x-2)^2+3x+2$

$f(-1)=9a-1=-1 \quad \therefore a=0$

$ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x+2$

$\therefore$구하는 나머지는 $3x+2$

17. 2003^{10} 를 2002 와 2004 로 나눈 나머지가 각각 a, b 일 때, $a-b$ 의 값은?

① 0　② 1　③ -1　④ 2　⑤ -2

해설

2002를 x라 하면, $2003^{10}=(x+1)^{10}$
$(x+1)^{10}=xQ(x)+a$
$(x+1)^{10}=(x+2)Q(x)+b$
나머지 정리에 의해
$x=0,\ x=-2$를 각각 대입하면,
$a=1,\ b=1$
$\therefore a-b=0$

18. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1,\ Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$P - Q = (a - b)x^2 + 2x - 2 \cdots$ ㉠

$P + Q = x\left\{2x^2 + (a + b)x + 2\right\} \cdots$ ㉡

$P,\ Q$ 의 최대공약수를 G 라 하면,

G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.

그런데 G 는 이차이고, $P,\ Q$ 에는

x 라는 약수가 없으므로 ㉠, ㉡에서 G 는

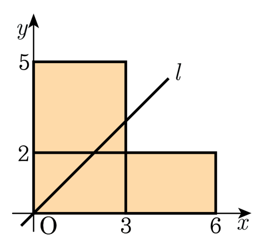
$(a - b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a + b)x + 2$ 이다.

$\therefore\ a - b = -2,\ a + b = -2$

$\therefore\ a = -2,\ b = 0$

$\therefore\ 2a + b = -4$

19. 다음 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 원점을 지나는 직선 l이 이등분할 때, 직선 l의 기울기를 구하면?

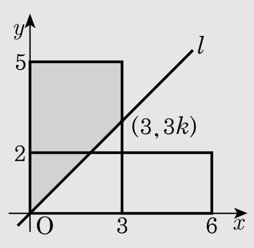


▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

직선 l을 $y = kx$라 하자.



위의 그림에서 전체넓이는 $3 \cdot 5 + (6-3) \cdot 2 = 21$이고

어두운 부분의 넓이는 $\{5 + (5 - 3k)\} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}$이다.

직선l이 전체 넓이를 이등분하므로

$\frac{21}{2} = \frac{3(10-3k)}{2}$, $k = 1$

$\therefore$ 기울기는 1