1. 실수 x, y에 대하여, 등식 $2x+y+(x-3y)i=3+2i$가 성립할 때, $\frac{x}{y}$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{11}$ ② 11 ③ 7 ④ -7 ⑤ -11

해설

$2x+y=3,\ x-3y=2$ 이므로

$x=\frac{11}{7}$, $y=-\frac{1}{7}$

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{11}{7}\times-\frac{7}{1}=-11$

2. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ **답:**

▶ **답:**

▷ **정답:** 2

▷ **정답:** -2

해설

i) $x<1$일 때,

$-2(x-1)+(x-4)=0$

$\therefore x=-2$

ii) $x\geq 1$일 때,

$2(x-1)+x-4=0$

$\therefore x=2$

따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

3. 이차함수 $y = -\frac{1}{3}x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y = -\frac{1}{3}(x+4)^2 + 1$$

따라서 $x = -4$ 일 때, 최댓값은 1 이다.

4. 두 점 A$(5, -11)$, B$(-4, 7)$ 일 때, 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점의 좌표는 P$(a,\ b)$, 선분 AB를 $2:1$ 로 외분하는 점의 좌표는 Q$(c,\ d)$ 이다. 이때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하면?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$$\mathrm{P}(a,b)=\left(\frac{2\cdot(-4)+1\cdot(5)}{2+1},\ \frac{2\cdot7+1\cdot(-11)}{2+1}\right)$$

$$=(-1,\ 1)$$

$$\mathrm{Q}(c,d)=\left(\frac{2\cdot(-4)-1\cdot(5)}{2-1},\ \frac{2\cdot7-1\cdot(-11)}{2-1}\right)$$

$$=(-13,\ 25)$$

$$\therefore\ a+b+c+d\ =-1+1-13+25=12$$

5. 네 점 $O(0, 0)$, $A(3, 1)$, $B(4, 3)$, $C(a, b)$를 꼭짓점으로 하는 □OABC가 평행사변형일 때, $a+b$의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선 OB, AC의 중점이 일치하므로

$$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$$

$\frac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\frac{b+1}{2}=\frac{3}{2}$에서 $b=2$

$\therefore\ a+b=3$

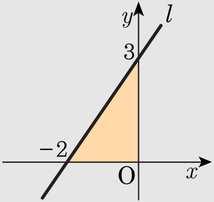
6. 직선 $3x-2y+6=0$이 x 축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$3x-2y+6=0$을 그래프에 도시해보면,



$\therefore$ 빗금 친 부분의 넓이 : $\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

7. 다음 연립방정식이 $x = y = 0$ 이외의 해를 가질 때, k의 값은?

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + y = kx \end{cases}$$

① $\frac{5}{2}$ ② $-\frac{5}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$x + 2y = 0 \cdots$ ㉠,
$3x + y = kx \cdots$ ㉡
㉠ $-$ ㉡ $\times 2$ 하면 $(2k - 5)x = 0$
㉠ $\times (3 - k) -$ ㉡ 하면 $(2k - 5)y = 0$
따라서 $k \neq \frac{5}{2}$ 일 때
$x = y = 0$
$k = \frac{5}{2}$ 일 때
㉠, ㉡는 $x + 2y = 0$ 이 되어 부정
(참고) $k \neq \frac{5}{2}$ 일 때
두 직선은 원점에서 만나고,
$k = \frac{5}{2}$ 일 때 두 직선은 모두
원점을 지나면서 일치한다.
결국 기울기가 같으면 되므로 처음부터
$-\frac{1}{2} = k - 3$ 으로 해도 된다.

8. 두 직선 $mx-y+m+1=0$ 과 $y=-x+2$ 가 제1사분면에서 만나도록 하는 상수 m 의 값의 범위는?

① $\frac{1}{3}<m<1$　　② $-\frac{1}{3}<m<1$

③ $-1<m<2$　　④ $m<-\frac{1}{3},\ m>1$

⑤ $-1<m<-\frac{1}{3}$

해설

$mx-y+m+1=0 \cdots$ ㉠

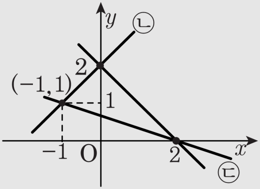
$\Leftrightarrow m(x+1)-(y-1)=0$ 에서

이 직선은 m 의 값에 관계없이

항상 점 $(-1,1)$을 지난다.

다음 그림에서 ㉠이 직선 $y=-x+2$ 와

제1사분면에서 나려면 ㉠의 기울기 m 은



㉡의 기울기 $\frac{2-1}{0-(-1)}=1$ 보다 작고

㉢의 기울기 $\frac{0-1}{2-(-1)}=-\frac{1}{3}$ 보다 커야한다.

$\therefore\ -\frac{1}{3}<m<1$

9. 다항식 $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + 2$ 를 $x-1$ 로 나누면 나누어떨어지고, $x+1$ 로 나누면 나머지가 2 라고 한다. mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(1) = 1 + m + n + 2 = 0,\ m + n = -3$

$f(-1) = -1 + m - n + 2 = 2,\ m - n = 1$

두 식을 연립하여 풀면 $m = -1,\ n = -2$

$\therefore\ mn = 2$

10. 다항식 $2x^3+3x^2+ax+b$가 $x+2$로 나누어 떨어질 때, $2a-b$의 값은?

① 28 ② 12 ③ 6 ④ -4 ⑤ -12

해설

준식을 $f(x)$라 하면 $f(-2)=0$이므로
$-16+12-2a+b=0$에서 $2a-b=-4$

11. 다음 중 $x^2+y^2+2xy-2x-2y$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x+y$ ② $-x-y$ ③ $x+y-2$

④ $x-y$ ⑤ $2x+2y$

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준 식}) &= (x^2+2xy+y^2)-2(x+y) \\
&= (x+y)^2-2(x+y) \\
&= (x+y)(x+y-2)
\end{aligned}
$$

한편,

$$
\begin{aligned}
(x+y)(x+y-2) &= -(-x-y)(x+y-2) \\
&= \frac{1}{2}(2x+2y)(x+y-2)
\end{aligned}
$$

12. 방정식 $x^2-2|x|-3=0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

i) $x \geq 0$일 때

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x \geq 0$이므로 $x=3$

ii) $x<0$일 때

$x^2+2x-3=0$, $(x-1)(x+3)=0$

$x=1$ 또는 $x=-3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-3$

(i), (ii)에서 $x=3$ 또는 $x=-3$

따라서 근의 합은 0이다.

13. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $A(-2k-1, 5)$ $B(k, -k-10)$, $C(2k+5, k-1)$가 일직선 위에 있을 때, k의 값의 곱을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

세 점 A, B, C가 일직선 위에 있으므로
직선 AB와 직선 BC의 기울기는 같다.

$$\frac{-k-10-5}{k-(-2k-1)} = \frac{(k-1)-(-k-10)}{2k+5-k}$$

이 식을 정리하면 $k^2+7k+12=0$

$\therefore$ k의 값의 곱은 12이다.

14. $x+\frac{1}{x}=3$ 일 때, $x^2+\frac{1}{x^2}$ 의 값과 $x^3+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 차례대로 구하면? (단, $x>0$)

① 5, 6　② 7, 18　③ 8, 16
④ 9, 18　⑤ 10, 27

해설

$x+\frac{1}{x}=3$ 일 때

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=27-9=18$$

15. a, b, c가 $\triangle ABC$의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 = 0$을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$a^3 + a^2b - ab^2 - a^2c + b^2c - b^3 = 0$

$a^2(a+b) - b^2(a+b) - c(a^2 - b^2) = 0$

$(a+b)(a^2 - ac + bc - b^2) = 0$

$(a+b)\{((a-b)(a+b) - c(a-b)\} = 0$

$(a+b)(a-b)(a+b-c) = 0$

$a+b>0, a+b-c>0$이므로 $a=b$

$\therefore a=b$인 이등변삼각형

16. 세 개의 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $[a,\ b,\ c] = (a-b)(a-c)$라 할 때, $[a,\ b,\ c]+[b,\ c,\ a]+[c,\ a,\ b]=0$이면 $[a,\ b,\ c]$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a-b)(a-c)+(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)=0$

전개하여 정리하면 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore\ a=b=c$

$\therefore\ [a,\ b,\ c]=(a-b)(a-c)=0$

17. 다음 중 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$를 만족하는 복소수 z의 개수는? (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

① 없다.
② 1 개
③ 2 개
④ 3 개
⑤ 무수히 많다.

해설

$z=a+bi$로 놓으면 $\bar{z}=a-bi$ (단, a, b는 실수)이므로 주어진 식에 대입하면

$(2+3i)(a+bi)+(2-3i)(a-bi)=2$

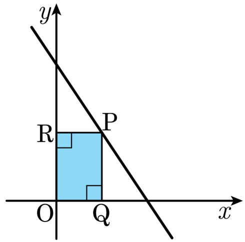
$(2a-3b)+(3a+2b)i+(2a-3b)-(3a+2b)i=2$

$2(2a-3b)=2$

$\therefore\ 2a-3b=1$

따라서 $2a-3b=1$을 만족하는 a, b는 무수히 많고, $z=a+bi$이므로 문제의 조건을 만족하는 z가 무수히 많음을 알 수 있다.

18. 직선 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 이므로

점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$ 로 놓으면 $b=-\frac{3}{2}a+3$

$$\square\mathrm{OQPR}=ab=a\left(-\frac{3}{2}a+3\right)$$
$$=-\frac{3}{2}a^2+3a$$
$$=-\frac{3}{2}(a-1)^2+\frac{3}{2}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$a>0,\ b=-\frac{3}{2}a+3>0 \qquad \therefore\ 0<a<2$

따라서 $\square$OQPR 의 넓이는 $a=1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

19. 다항식 $4x^3+6x^2-12x-11$을 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 하고 다항식 $Q(-2x+3)$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 r이라 할 때, $R+r$의 값은?

① -5　② -4　③ -3　④ -2　⑤ -1

해설

$4x^3+6x^2-12x-11=(x+2)Q(x)+R$

$x=-2$을 대입하면 $R=5$

$4x^3+6x^2-12x-11=(x+2)Q(x)+5\cdots$㉠

$Q(-2x+3)=(x-1)Q'(x)+r$

$x=1$을 대입하면 $r=Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면,

$4+6-12-11=3Q(1)+5$에서 $Q(1)=r=-6$

$\therefore\ R+r=5+(-6)=-1$

20. 자연수 n 에 대하여 $i(1+i)^n$ 이 양의 실수일 때, 다음 중 n 의 값이 될 수 있는 것은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

$i(1+i)^n = p(p>0)$, $(1+i)^n = \dfrac{p}{i} = -pi$

즉, $(1+i)^n =$ 음수 $\times\, i$ 이어야 한다.

이 때, n 이 홀수이면 $(1+i)^n$ 은 순허수꼴이 될 수 없다.

$n=2k$ 일 때, $(1+i)^{2k}=(2i)^k$

$k=4m$ 이면 $(2i)^{4m}$ 이 양의 정수이므로

$k=4m+1 \Rightarrow (1+i)^{2k}=(2i)^k=(2i)^{4m+1} \Rightarrow$ 양수 $\times\, 2i$

$k=4m+2 \Rightarrow (1+i)^{2k}=(2i)^k=(2i)^{4m+2} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-4)$

$k=4m+3 \Rightarrow (1+i)^{2k}=(2i)^k=(2i)^{4m+3} \Rightarrow$ 양수 $\times\, (-8i)$

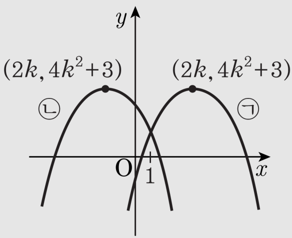
따라서 $k=4m+3$, 즉 $n=2k=8m+6$ 일 때 조건을 만족한다.

주어진 수 중에서 알맞은 것은 22 이다.

21. $x \geq 1$ 에 대하여 $y = -x^2 + 4kx + 3$ 이 최댓값 11 을 가질 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $\frac{9}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

해설



$y = \ -x^2 + 4kx + 3 = -(x-2k)^2 + (4k^2+3)$

㉠ 경우 : $2k \geq 1 \ \Rightarrow \ k \geq \frac{1}{2}$

최대 : $4k^2 + 3 = 11,\ k^2 = 2$

$\therefore \ k = \sqrt{2} \ \left(\because \ k \geq \frac{1}{2}\right)$

㉡ 경우 : $2k \leq 1 \ \Rightarrow \ k \leq \frac{1}{2}$

최대 : $y = -1 + 4k + 3 = 4k + 2 = 11$

$k = \frac{4}{9}$ 인데 $k \leq \frac{1}{2}$ 이므로

$\therefore$ 해가 존재하지 않음.

$\therefore \ k = \sqrt{2}$