1. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2, \quad -\sqrt{2}, \quad 2i, \quad -2i,$ $3i, \quad -3i, \quad 1-i, \quad 1+i$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.

$\therefore \ 2i, \ -2i, \ 3i, \ -3i$ 4 개,

$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로

(실수)$^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

2. $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$ 의 값은?

① $-1+i$ ② $-1-i$ ③ 0

④ $1+i$ ⑤ $1-i$

해설

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{50}}$$

$$\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\left(\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{i^{45}}+\frac{1}{i^{46}}+\frac{1}{i^{47}}+\frac{1}{i^{48}}\right)+\frac{1}{i^{49}}+\frac{1}{i^{50}}$$

$$=\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1\right)+\frac{1}{i}-1$$

$$=\frac{1}{i}-1=-i-1$$

3. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$

$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$

$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$

(2) $x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

4. 이차함수 $y = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$ 은 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다고 한다. $a - b$ 의 값을 구하면?

① -8 ② -5 ③ 3 ④ 7 ⑤ 11

해설

$y = \frac{3}{2}(x^2 + 4x) - 3 = \frac{3}{2}(x + 2)^2 - 9$ 에서

$a = -2$, $b = -9$

그러므로 $a - b = 7$ 이다.

5. 두 점 $A(-1,\ -2), B(2,\ 4)$ 에 대하여 $\overline{AB}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점을 P, $1:2$ 로 외분하는 점을 Q라고 할 때, $\overline{PQ}$ 의 길이를 구하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $4\sqrt{5}$

해설

내분점, 외분점 구하는 공식을 이용한다.

$$P = \left(\frac{1\times 2 + 2\times(-1)}{3}, \frac{1\times 4 + 2\times(-2)}{3}\right) = (0, 0)$$

$$Q = \left(\frac{1\times 2 - 2\times(-1)}{1-2}, \frac{1\times 4 - 2\times(-2)}{1-2}\right) = (-4, -8)$$

$$\therefore\ \overline{PQ} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

6. $ac < 0,\ bc > 0$ 일 때, 일차함수 $ax + by + c = 0$ 이 나타내는 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : 사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설

$b \neq 0$ 이므로,

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \cdots$ ㉠

$ac < 0,\ bc > 0$ 에서 $ac \cdot bc < 0$

$\therefore\ abc^2 < 0$ 즉, $ab < 0$

$ab < 0$ 에서 기울기 $-\frac{a}{b} > 0$

$bc > 0$ 에서 y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$

따라서 ㉠은 제 2 사분면을 지나지 않는다.

7. 직선 $2x+4y+1=0$에 평행하고, 두 직선 $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$의 교점을 지나는 직선을 $y=ax+b$라 할 때 $2a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

직선 $2x+4y+1=0$의 기울기는

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ 에서 $-\frac{1}{2}$

또, $x-2y+10=0$, $x+3y-5=0$을 연립하여 풀면

$x=-4,\ y=3$

$y-3=-\frac{1}{2}(x+4)$

$\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$이므로

$a=-\frac{1}{2}$, $b=1$

$\therefore \quad 2a+b=0$

8. 다음 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 구하여라.

$(0,0),\ (2,6),\ (6,3)$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{2}|2\cdot 3-6\cdot 6| = 15$

9. 다음 중에서 겉넓이가 22, 모든 모서리의 길이의 합이 24인 직육면체의 대각선의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{12}$

③ $\sqrt{13}$ ④ $\sqrt{14}$

⑤ 유일하지 않다.

해설

겉넓이 : $2xy + 2xz + 2yz = 22$

모서리 : $4x + 4y + 4z = 24$

대각선 : $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$= (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$

$= 6^2 - 22 = 14$

$\therefore\ d = \sqrt{14}$

10. 다항식 $f(x)$ 를 $2x-1$로 나누면 나머지는 -4이고, 그 몫을 $x+2$로 나누면 나머지는 2이다. 이때, $f(x)$를 $x+2$로 나눌 때의 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$f(x)=(2x-1)Q(x)-4$라 하면
$f(-2)=-5Q(-2)-4$
그런데 $Q(-2)=2$ 이므로 $f(-2)=-14$

11. $x^4 - 3x^2 + 1$을 인수분해 하면?

① $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ ② $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

③ $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - x - 1)$ ④ $(x^2 + x - 1)(x^2 - 2x - 1)$

⑤ $(x^2 + x + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 1 &= x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 - 1)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1) \end{aligned}$$

12. $(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+\cdots+(9^2-10^2)$을 구하면?

① 55 ② −55 ③ 45 ④ −45 ⑤ 0

해설

$$(1^2-2^2)+(3^2-4^2)+(5^2-6^2)+\cdots+(9^2-10^2)$$
$$=(1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+(5-6)(5+6)+$$
$$\cdots+(9-10)(9+10)$$
$$=-(1+2+3+4+\cdots+9+10)$$
$$=-55$$

13. 이차방정식 $(2-\sqrt{3})x^2-2(\sqrt{3}-1)x-6=0$의 두 근 중 큰 근에 가장 가까운 정수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

이차항의 계수를 유리수로 고치기 위해 방정식의 양변에 $2+\sqrt{3}$을 곱하면

$x^2-2(\sqrt{3}+1)x-(12+6\sqrt{3})=0$

근의 공식을 이용해 위 방정식을 풀면

$$x=(\sqrt{3}+1)\pm\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+12+6\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$=(\sqrt{3}+1)\pm 2(\sqrt{3}+1)$$

$\therefore\ x=3\sqrt{3}+3$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

큰 근은 $3\sqrt{3}+3$

그런데 $\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7\cdots$ 이므로

가장 가까운 정수는 8이다.

14. x에 관한 다항식 $f(x)$를 x^2-4로 나눈 나머지는 $2x+1$이고, $g(x)$를 x^2-5x+6으로 나눈 나머지는 $x-4$이다. 이 때, $(x+2)f(x)+3g(x+1)$을 $x-2$로 나눈 나머지를 구하면?

① 7 ② 9 ③ 13 ④ 17 ⑤ 23

해설

$f(x)=(x^2-4)p(x)+2x+1$에서 $f(2)=5$

$g(x)=(x^2-5x+6)q(x)+x-4$에서 $g(3)=-1$

$h(x)=(x+2)f(x)+3g(x+1)$이라 놓으면,

$h(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는

$h(2)=4f(2)+3g(3)=17$

15. 다음은 다항식 A 를 다항식 B 로 나누었을 때, 몫이 Q 이고 나머지가 R 이면, A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수임을 보이는 과정을 나타낸 것이다.

> $A = BQ + R$ 이 성립한다. A, B 의 공약수를 g 라 하면
> $A = ag$, $B = bg$ (a, b, g 는 다항식)$\cdots$㉠로 쓸 수 있다.
> 이 때, $R = A - BQ = (a - bQ)g$ 에서 g 는 R 의 약수이다.
> $\therefore$ g 는 B, R 의 공약수이다. $\cdots$㉡
> 역으로, B, R 의 공약수를 g' 이라 하면
> $B = b'g', R = r'g'$ (b', r', g' 은 다항식)$\cdots$㉠′ 으로 쓸 수 있다.
> 이 때, $A = BQ + R = (b'Q + r')g'$ 에서 g' 은 A 의 약수이다.
> $\therefore$ g' 은 A, B 의 공약수이다. $\cdots$ ㉡′
> 이상에서 {g | g 는 A, B 의 공약수}= {g' | g' 은 B, R 의 공약수}$\cdots$ ㉢
> $\therefore$ A, B 의 최대공약수는 B, R 의 최대공약수이다. $\cdots$ ㉣

위 과정에서 옳지 <u>않은</u> 것은?

① ㉠, ㉠′ ② ㉡, ㉡′ ③ ㉢

④ ㉣ ⑤ 없다.

해설

유클리드의 호제법의 원리를 설명한 것으로 옳지 않은 과정은 없다.

16. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1 ② -1 ③ 2 ④ -2 ⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$

17. $y=0,\ y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2\neq 0$

$\therefore k\neq 2 \cdots\cdots$ ㉠

또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=\{3(k-1)\}^2-(k-2)(9k+1)>0$$

$$9(k^2-2k+1)-(9k^2-17k-2)>0$$

$$-k+11>0$$

$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k<11,\ k\neq 2$

따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

18. 두 점 $(a,\ 0),\ (0,\ b)$ 에서 직선 $2x - y = 0$ 까지의 거리가 같을 때, $\dfrac{2a-b}{a+b}$ 의 값은 ? (단, $ab < 0$)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 점 $(a,\ 0),\ (0,\ b)$ 에서
직선 $2x - y = 0$
까지의 거리가 같으므로,

$$\frac{|2a-0|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|0-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$|2a| = |-b|$,$ab < 0$ 이므로

$2a = -b,\ \ \therefore\ b = -2a$

따라서, $\dfrac{2a-b}{a+b} = \dfrac{2a+2a}{a-2a} = \dfrac{4a}{-a} = -4$

19. $(x-2)^4 = a(x-3)^4 + b(x-3)^3 + c(x-3)^2 + d(x-3) + e$ 가 x 에 대한 항등식일 때, $2c - bd$ 의 값은?

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

해설

x 에 대한 항등식 이므로 x 에 대한 적당한 수를 넣어 식을 만든다.

i) $x = 3 \Rightarrow e = 1$

ii) $x = 2 \Rightarrow a - b + c - d + 1 = 0$

iii) $x = 4 \Rightarrow a + b + c + d + 1 = 16$

iv) $x = 4 \Rightarrow 16a - 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

v) $x = 5 \Rightarrow 16a + 8b + 4c - 2d + 1 = 1$

위 5개의 식을 연립하여 a, b, c, d 의 값을 구한다.

$a = 1,\ b = 4,\ c = 6,\ d = 4,\ e = 1$

$\therefore 2c - bd = -4$

해설

$x - 2 = t$ 라 하면 $x - 3 = t - 1$

(준식) : $t^4 = a(t-1)^4 + b(t-1)^3 + c(t-1)^2 + d(t-1) + e$

다음처럼 조립제법으로 $t - 1$ 로 계속 나눌 때, 나오는 나머지가 순서대로 e, d, c, b 이고 마지막 몫이 a 이다.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{1} = e \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & 1 & 2 & 3 & \boxed{4} = d & \\
 & & 1 & 3 & & \\
\hline
1 & 1 & 3 & \boxed{6} = c & & \\
 & & 1 & & & \\
\hline
\end{array}$$

$a = 1 \quad \boxed{4} = b$

$\therefore 2c - bd = -4$

20. $-1 \le \frac{p}{2} \le 0,\ p+2q \le 2$ 를 만족하는 실수 $p,\ q$ 에 대하여 이차함수 $y = x^2 + px + q\ (0 \le x \le 1)$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{4}$

해설

$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$

이 때 $-1 \le \frac{p}{2} \le 0$ 에서 $0 \le -\frac{p}{2} \le 1$ 이므로

최솟값 m 은 $x = -\frac{p}{2}$ 일 때이다.

$\therefore\ m = q - \frac{p^2}{4}$

또한 $p + 2q \le 2$ 에서 $q \le -\frac{p}{2} + 1$

$\therefore\ m \le -\frac{p^2}{4} - \frac{p}{2} + 1 = -\frac{1}{4}(p+1)^2 + \frac{5}{4}$

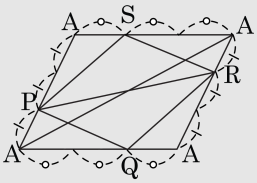
따라서 m 의 최댓값은 $\frac{5}{4}$ 이다.

21. 평행사변형 ABCD에 대하여 네 변 AB, BC, CD, DA를 2 : 1로 내분하는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. A(−1, 5), B(−4, −1)이고 R(7, 6)일 때, 점 S의 좌표는?

① (1, 6) ② (1, 7) ③ (2, 6) ④ (2, 7) ⑤ (3, 6)

해설

다음 그림에서 사각형 P, Q, R, S는 평행사변형이고



대각선 PR의 중점은 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점과 일치한다.

A(−1, 5), B(−4, −1)이므로 점 P의 좌표는

$$P\left(\frac{-8-1}{2+1}, \frac{-2+5}{2+1}\right)$$

$\therefore P(-3, 1)$

R(7, 6)이므로 대각선 PR의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1+6}{2}\right)$$

즉 $\left(2, \frac{7}{2}\right) \cdots ㉠$

이 때, 점 D (a, b)로 놓으면

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) \cdots ㉡$$

㉠과 ㉡이 일치하므로 $\frac{-4+a}{2} = 2$에서 $a = 8$

$\frac{-1+b}{2} = \frac{7}{2}$에서 $b = 8$

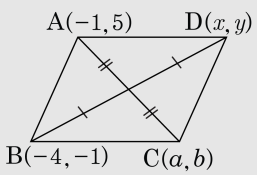
따라서 점 D(8, 8)이므로

변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는

$$S\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$$

즉 S(2, 6)

[별해] 다음과 같이 두 꼭짓점 C, D를 C (a, b), D(x, y)로 놓으면



$\overline{AC}$와 $\overline{BD}$의 중점이 일치하므로

$\frac{-1+a}{2} = \frac{-4+x}{2}$, $\frac{5+b}{2} = \frac{-1+y}{2}$에서

$x - a = 3 \cdots ㉠$

$y - b = 6 \cdots ㉡$

R(7, 6)이므로 $\frac{2x+a}{3} = 7$에서 $a + 2x = 21 \cdots ㉢$

$\frac{2y+b}{3} = 6$에서 $b + 2y = 18 \cdots ㉣$

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a = 5, x = 8$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b = 2, y = 8$

$\therefore D(8, 8)$

그러므로 변 DA를 2 : 1로 내분하는 점 S의 좌표는

$$S\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$$

즉 S(2, 6)