1. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3)$, $\mathrm{Q}(1,\ a)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0$, $a^2 - 4a + 4 = 0$, $(a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

2. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0,\ 6)$
② $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 6)$
③ $P(3.6,\ 0)$, $Q(0,\ 6)$
④ $P(2.4, 0)$, $Q(0,\ 5)$
⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 2)$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $P(x,\ 0)$ 과 $Q(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36$ $\therefore\ x = 3.6$ $\therefore\ P(3.6,\ 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36$ $\therefore\ y = 6$ $\therefore\ Q(0,\ 6)$

3. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

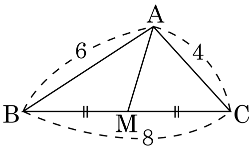
$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$$

$$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

4. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

5. 두 정점 $A(1,\ 2)$, $B(-3,\ 0)$으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?

① $y=2x+1$ ② $y=2x-1$ ③ $y=-2x+1$

④ $y=-2x-1$ ⑤ $y=-x+2$

해설

구하는 점을 $P(x,y)$ 라 하면

$\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2}$

양변을 제곱해서 정리하면

$-8x-4y-4=0,\ -4y=8x+4$

$\therefore\ y=-2x-1$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.

$\overline{AB}$ 의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$ 이므로

$\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고

$\overline{AB}$ 의 중점$(-1,\ 1)$ 을 지난다.

$\therefore\ y-1=-2(x+1)$

$\therefore\ y=-2x-1$

6. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$, $\mathrm{C}(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC와 임의의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소일 때, $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$

$=\left\{(a-1)^2+(b-6)^2\right\}+\left\{(a+2)^2+(b-2)^2\right\}$

$\quad+\left\{(a-4)^2+(b-1)^2\right\}$

$=3a^2-6a+3b^2-18b+62$

$=3\left(a^2-2a+1\right)+3\left(b^2-6b+9\right)+32$

$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+32$

이때, a, b는 실수이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은

$a=1,\ b=3$일 때 최소이다.

$\therefore a+b=4$

7. 두 점 $A(1,\ 5)$, $B(5,\ 3)$ 에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점 P 의 좌표는?

① $(4,\ 5)$ ② $(3,\ 4)$ ③ $(2,\ 3)$

④ $(1,\ 2)$ ⑤ $(0,\ 1)$

해설

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 되기 위한
점 P는 점 A와 점 B의 중점이어야 한다.
따라서 $P(3,4)$

해설

$P(x,\ y)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= \{(x-1)^2+(y-5)^2\}\\ &\quad+\{(x-5)^2+(y-3)^2\}\\ &= 2x^2-12x+2y^2-16y+60\\ &= 2(x^2-6x+9)+2(y^2-8y+16)+10\\ &= 2(x-3)^2+2(y-4)^2+10\end{aligned}$$

따라서 $x=3,\ y=4$ 일 때 최솟값을 갖는다.

8. $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -2)$ 을 $3:2$로 외분하는 점 $\mathrm{C}(a, b)$ 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

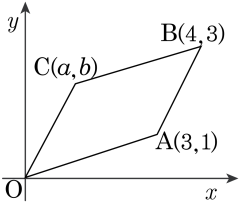
외분점 구하는 공식을 이용한다.

C 의 좌표는

$$\left(\frac{3\times3-2\times1}{3-2},\ \frac{3\times(-2)-2\times2}{3-2}\right)=(7,\ -10)$$

$\therefore\ a+b=-3$

9. 다음 그림과 같이 네 점 $A(3,\ 1)$, $B(4,\ 3)$, $C(a,\ b)$, $O(0,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 평행사변형 OABC에서 $a+b$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행사변형 OABC에서 두 대각선의 중점은 일치하므로

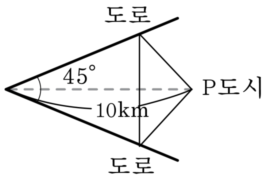
$$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)=\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+1}{2}\right)$$

$\dfrac{a+3}{2}=2$에서 $a=1$

$\dfrac{b+1}{2}=\dfrac{3}{2}$ 에서 $b=2$

$\therefore a+b=3$

10. 다음 그림과 같이 두 개의 도로가 $45°$ 의 각도로 교차하고 있다. 교차점에서 10 km 떨어진 도시 P 와 두 도로 사이를 연결하는 삼각형 모양의 새로운 도로를 건설할 때, 건설해야 할 도로의 최소 길이는?



① $10\sqrt{2}$ km ② $12\sqrt{2}$ km ③ $14\sqrt{2}$ km

④ $16\sqrt{2}$ km ⑤ $18\sqrt{2}$ km

해설

점 P 의 두 도로에 대한 대칭점을 각각 P', P'' 이라 하면 $\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P'Q}+\overline{QR}+\overline{RP''}$ 이고 $\overline{P'P''}$ 가 최단거리가 된다. $\triangle P'OP''$ 가 직각이등변 삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{P'P''}^2=10^2+10^2=200 \quad \therefore\ \overline{P'P''}=10\sqrt{2}$