

1. x 에 관한 삼차식 $x^3 + mx^2 + nx + 1$ 을 $x+1$ 로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$ 로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $-3(m+n)$ 의 값은?

① 4

② 8

③ 12

④ 14

⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x+1)Q(x) + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + mx^2 + nx + 1 \\ &= (x-2)Q'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = -1 + m - n + 1 = 5$$

$$f(2) = 8 + 4m + 2n + 1 = 0$$

$$\therefore m = \frac{1}{6}, n = -\frac{29}{6}$$

$$\therefore m+n = -\frac{14}{3}, -3(m+n) = 14$$

2. 다항식 $f(x)$ 를 $(x+3)(x-6)$ 으로 나누었을 때의 나머지가 $x-2$ 이었다.
 $f(x)$ 를 $(x+3)$ 으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -5

② -4

③ -3

④ -2

⑤ -1

해설

$$f(x) = (x+3)(x-6)Q(x) + x-2 \text{ 이므로}$$

$$f(-3) = -5$$

3. 다항식 $x^4 - 3x^2 + ax + 5$ 를 $x + 2$ 로 나누면 나머지가 3이다. a 의 값은?

① 0

② 2

③ 3

④ -2

⑤ -3

해설

$x^4 - 3x^2 + ax + 5 = f(x)$ 라 놓자.

$f(-2) = 3$ 에서 $-2a + 9 = 3$

$\therefore a = 3$

4. 어떤 일차식 $g(x)$ 에 대하여

$x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x) = \{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2$ 가 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{우변}) &= \{(x - \alpha)(x - \beta)\}^2 \\&= \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}^2 \\&= x^4 - 2(\alpha + \beta)x^3 \\&\quad + \{(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta\}x^2 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta)x + \alpha^2\beta^2 \\&= x^4 + 2x^3 - 3x^2 - g(x)\end{aligned}$$

$g(x)$ 가 일차식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$-2(\alpha + \beta) = 2, (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = -3$$

$$\therefore \alpha + \beta = -1, \alpha\beta = -2$$

5. 모든 실수 x 에 대하여 $P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$, $P(0) = 0$ 을 만족한다.
2차 이하의 다항식 $P(x)$ 의 계수의 합은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

$P(0) = 0$ 에서 $c = 0 \therefore P(x) = ax^2 + bx$

$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 이므로

$a(x^2+1)^2 + b(x^2+1) = (ax^2+bx)^2 + 1$

$ax^4 + 2ax^2 + a + bx^2 + b = a^2x^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 1$

양변의 계수를 비교하면

$a = a^2$, $2ab = 0$, $2a + b = b^2$, $a + b = 1$

$a^2 = a$ 와 $a + b = 1$ 에서

$(a, b) = (0, 1), (1, 0)$ 이 되는데

이 중 $(1, 0)$ 은 $2a + b = b^2$ 을 만족하지 않으므로 $(a, b) = (0, 1)$

즉, $P(x) = x$ 뿐이다.

$\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1) = \{P(x)\}^2 + 1$ 에서 $x = 0$ 을 대입하면

$P(1) = \{P(0)\}^2 + 1$ 이 된다.

$P(1) = 1$ ($\therefore$ 모든 계수의 합은 $x = 1$ 대입)

6. 다음 등식이 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d 에 대하여 $a+b+c+d$ 의 값을 구하면? (단, $a < c$)

$$(x-a)^2(bx-x^2-1) = (x-c)^2(dx-x^2-1)$$

① -4

② 4

③ 5

④ -5

⑤ 0

해설

$a < c$ 에서 $a \neq c$ 이므로 주어진 등식에서

$$x^2 - bx + 1 = (x - c)^2 \quad \therefore b = 2c, 1 = c^2$$

$$x^2 - dx + 1 = (x - a)^2 \quad \therefore d = 2a, 1 = a^2$$

$$\therefore a = -1, b = 2, c = 1, d = -2$$

$$\therefore a + b + c + d = 0$$