1. 이차함수 $y = 4x^2 - 24x + 10$은 $x = a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. $a - b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 29

해설

$y = 4x^2 - 24x + 10$

$= 4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 10$

$= 4(x - 3)^2 - 26$

$\therefore a = 3,\ b = -26$

$\therefore a - b = 3 - (-26) = 29$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x+3>-3+x \\ 5x+1 \le 3x-1 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-6<x\le -1$

해설

$\begin{cases} 2x+3>-3+x \\ 5x+1 \le 3x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-6 \\ x \le -1 \end{cases}$

$\therefore\ -6<x\le -1$

3. 이차함수 $y = -2x^2 - 6ax - \frac{43}{3}$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = 3$ 이고, 최댓값이 b 일 때, 상수 a , b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

축의 방정식이 $x = 3$ 이고 최댓값이 b 이므로

$y = -2(x-3)^2 + b$

$= -2(x^2 - 6x + 9) + b$

$= -2x^2 - 6ax - \frac{43}{3}$

$y = -2x^2 + 12x + b - 18 = -2x^2 - 6ax - \frac{43}{3}$ 에서

$a = -2,\ b = \frac{11}{3}$

$\therefore a + b = \frac{5}{3}$

4. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\dfrac{2w^2+3\overline{w}}{w^{100}+1}$의 값을 구하면?
(단, $\overline{w}$는 w의 켤레복소수이다.)

① 2 ② 3 ③ 5 ④ −3 ⑤ −5

해설

$x^2+x+1=0$의 두 근은
$\omega, \overline{\omega} \Rightarrow \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$
$\omega^2+\omega+1=0,$
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0,\ \omega^3-1=0,\ \omega^3=1$
$\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$
$(\overline{\omega}-1)(\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1)=0,$
$\overline{\omega}^3-1=0,\ \overline{\omega}^3=1$
$$\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{\omega^{100}+1}=\frac{2\omega^2+3\overline{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega+1}$$
$$=\frac{2\omega^2}{-\omega^2}+\frac{3\overline{\omega}}{-\omega^2}$$
$$=-2+\frac{3\omega\overline{\omega}}{-\omega^3}$$
$$=-2-\frac{3}{1}=-5$$

5. 방정식 $x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$의 값을 구하면?

① 7　② 11　③ 15　④ 19　⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3$, $\alpha\beta\gamma=-1$
$x^3+2x^2-3x+1=0$의 세 근이 α ,β ,γ이므로$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ 이다. $x=2$를 대입하면 $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=2^3-2^2(\alpha+\beta+\gamma)+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma=2^3+2\times2^2-2\times3+1$
$=8+8-6+1=11$

6. 방정식 $2x^2-4xy+4y^2-8x+16=0$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 x와 y의 곱은?

① -2 ② 3 ③ 4 ④ 8 ⑤ 10

해설

$2x^2-4xy+4y^2-8x+16=0$에서

$(x^2-4xy+4y^2)+(x^2-8x+16)=0$,

$(x-2y)^2+(x-4)^2=0$

$x=2y, x=4$

$\therefore\ x=4, y=2 \quad \therefore\ xy=8$

7. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$에 대하여 $a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 정삼각형

해설

$a^2 - ab + b^2 = (a+b-c)c$에서 $a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$
$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$
즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right\} = 0$
$\therefore\ a = b = c$
따라서, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

8. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$
$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-k$
$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-k$
$x^2+5x=X$로 치환하면
(준식) $=(X+4)(X+6)-k$
$=X^2+10X+24-k$
완전제곱식이 되려면 $24-k=25$
$\therefore\ k=-1$

9. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x+y=2+3i$ 라 할 때, $x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$ 의 값은?

① 13　　② $11+2i$　　③ 12

④ $12-i$　　⑤ 11

해설

$x+y=2+3i$, $\overline{x}+\overline{y}=2-3i$

$x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$

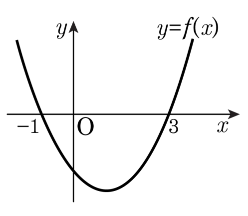
$=x(\overline{x}+\overline{y})+y(\overline{x}+\overline{y}))$

$=(x+y)(\overline{x}+\overline{y})$

$=(2+3i)(2-3i)$

$=13$

10. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$의 두 근의 합은?



① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$y = f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 3이므로
$f(x) = a(x+1)(x-3)\ (a>0)$으로 놓을 수 있다.
이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$이므로
$f(2x-1) = 0$에서
$4ax(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 근의 합은 2이다.

11. n이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x+2)^2$으로 나눈 나머지가 $4^n(x+2)$가 되도록 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

해설

(ⅰ) $f(x)=x^{2n}(x^2+ax+b)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$f(-2)=4^n(4-2a+b)=0$

$\therefore\ b=2a-4$

(ⅱ) $f(x)=x^{2n}(x^2+ax+2a-4)$
$=x^{2n}(x+2)(x+a-2)$
$=(x+2)^2Q(x)+4^n(x+2)$

$\therefore x^{2n}(x+a-2)=(x+2)Q(x)+4^n$

$x=-2$ 를 대입하면

$4^n(-4+a)=4^n$, $-4+a=1$

$\therefore\ a=5$

$b=2a-4$ 에서 $b=6$

$\therefore\ a+b=11$

12. $x_1^2 - 3x_1 = 7$ 이고, $x_2^2 - 3x_2 = 7$ 일 때, $x_1^3 + x_2^3$ 의 값은?

① 60 ② 66 ③ 72 ④ 84 ⑤ 90

해설

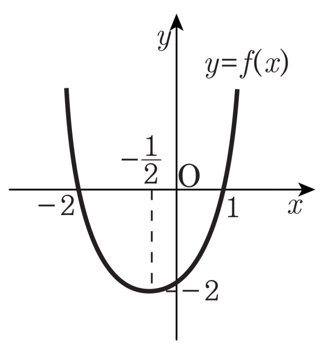
x_1 과 x_2 는 $x^2 - 3x - 7 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수와의 관계로부터

$x_1 + x_2 = 3,\ x_1x_2 = -7$

따라서 $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

$= 3^3 - 3 \cdot (-7) \cdot 3 = 90$

13. 다음 그림은 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 세 실근의 합은?



① $-\frac{5}{2}$　② $-\frac{3}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ 0　⑤ 1

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1 이므로

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = -2$ 또는 $f(x) = 1$

i) $f(x) = -2$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$

ii) $f(x) = 1$ 에서 $x = -\frac{1}{2} + \alpha$, $x = -\frac{1}{2} - \alpha$

따라서 모든 근의 합은

$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(-\frac{1}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{2}$

14. 방정식 $x^5 = 1$의 허근을 ω라 하자. $\alpha = \omega + \dfrac{1}{\omega}$일 때 $\alpha^2 + \alpha$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^5 = 1, (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore\ \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$

ω^2 으로 이 식을 나누면

$$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega}^{2} = 0$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega}^{2}\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0,\ \alpha^2 + \alpha = 1$

15. $\frac{2x-3}{4}$의 절대값이 2보다 크고 6보다 작을 때, 만족하는 정수 x의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

(1) $2 < \frac{2x-3}{4} < 6$일 때,

$8 < 2x-3 < 24$,

$11 < 2x < 27$,

$\frac{11}{2} < x < \frac{27}{2}$

$\therefore\ x = 6,\ 7,\ 8,\ \cdots,\ 13$

(2) $-6 < \frac{2x-3}{4} < -2$일 때,

$-24 < 2x-3 < -8$,

$-21 < 2x < -5$,

$-\frac{21}{2} < x < -\frac{5}{2}$

$\therefore\ x = -10,\ -9,\ -8,\ \cdots,\ -3$

따라서 x의 값의 합은 24이다.