

1. 이차함수 $y = 4x^2 - 24x + 10$ 은 $x = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다. $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

$$\begin{aligned}y &= 4x^2 - 24x + 10 \\&= 4(x^2 - 6x + 9 - 9) + 10 \\&= 4(x - 3)^2 - 26 \\ \therefore a &= 3, b = -26 \\ \therefore a - b &= 3 - (-26) = 29\end{aligned}$$

2. 연립부등식 $\begin{cases} 2x + 3 > -3 + x \\ 5x + 1 \leq 3x - 1 \end{cases}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-6 < x \leq -1$

해설

$$\begin{cases} 2x + 3 > -3 + x \\ 5x + 1 \leq 3x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -6 \\ x \leq -1 \end{cases}$$

$$\therefore -6 < x \leq -1$$

3. 이차함수 $y = -2x^2 - 6ax - \frac{43}{3}$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = 3$ 이고, 최댓값이 b 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$

② $\frac{1}{4}$

③ $\frac{5}{3}$

④ $\frac{5}{4}$

⑤ $\frac{3}{4}$

해설

축의 방정식이 $x = 3$ 이고 최댓값이 b 이므로

$$\begin{aligned}y &= -2(x-3)^2 + b \\&= -2(x^2 - 6x + 9) + b \\&= -2x^2 - 6ax - \frac{43}{3}\end{aligned}$$

$$y = -2x^2 + 12x + b - 18 = -2x^2 - 6ax - \frac{43}{3} \text{ 에서}$$

$$a = -2, b = \frac{11}{3}$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{3}$$

4. 방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 한 근을 ω 라 할 때, $\frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{\omega^{100} + 1}$ 의 값을 구하면?
(단, $\bar{w}$ 는 w 의 켤레복소수이다.)

① 2

② 3

③ 5

④ -3

⑤ -5

해설

$x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근은

$$\omega, \bar{\omega} \Rightarrow \omega + \bar{\omega} = -1, \omega\bar{\omega} = 1$$

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0, \omega^3 - 1 = 0, \omega^3 = 1$$

$$\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0,$$

$$(\bar{\omega} - 1)(\bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1) = 0,$$

$$\bar{\omega}^3 - 1 = 0, \bar{\omega}^3 = 1$$

$$\frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{\omega^{100} + 1} = \frac{2\omega^2 + 3\bar{\omega}}{(\omega^3)^{33}\omega + 1}$$

$$= \frac{2\omega^2}{-\omega^2} + \frac{3\bar{\omega}}{-\omega^2}$$

$$= -2 + \frac{3\omega\bar{\omega}}{-\omega^3}$$

$$= -2 - \frac{3}{1} = -5$$

5. 방정식 $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 세 실근을 α, β, γ 라 할 때, $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ 의 값을 구하면?

① 7

② 11

③ 15

④ 19

⑤ 21

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta + \gamma = -2, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -3, \alpha\beta\gamma = -1$$

$x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 이므로 $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$ 이다. $x = 2$ 를 대입하면 $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = 2^3 - 2^2(\alpha + \beta + \gamma) + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) - \alpha\beta\gamma = 2^3 + 2 \times 2^2 - 2 \times 3 + 1 = 8 + 8 - 6 + 1 = 11$

6. 방정식 $2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 와 y 의 곱은?

① -2

② 3

③ 4

④ 8

⑤ 10

해설

$2x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x + 16 = 0$ 에서

$$(x^2 - 4xy + 4y^2) + (x^2 - 8x + 16) = 0,$$

$$(x - 2y)^2 + (x - 4)^2 = 0$$

$$x = 2y, x = 4$$

$$\therefore x = 4, y = 2 \quad \therefore xy = 8$$

7. 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c \text{에서 } a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \left\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

8. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k$ 가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해될 때, 상수 k 의 값을 정하면?

① -1

② 1

③ 0

④ 2

⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - k \\ &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - k \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - k \\ & \quad x^2 + 5x = X \text{로 치환하면} \\ & (\text{준식}) = (X+4)(X+6) - k \\ & \quad \quad \quad = X^2 + 10X + 24 - k \\ & \text{완전제곱식이 되려면 } 24 - k = 25 \\ & \therefore k = -1 \end{aligned}$$

9. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x + y = 2 + 3i$ 라 할 때, $x\bar{x} + x\bar{y} + \bar{x}y + y\bar{y}$ 의 값은?

①

13

② $11 + 2i$

③ 12

④ $12 - i$

⑤ 11

해설

$$x + y = 2 + 3i, \bar{x} + \bar{y} = 2 - 3i$$

$$x\bar{x} + x\bar{y} + \bar{x}y + y\bar{y}$$

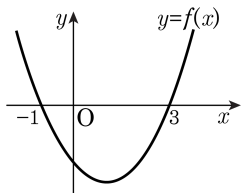
$$= x(\bar{x} + \bar{y}) + y(\bar{x} + \bar{y})$$

$$= (x + y)(\bar{x} + \bar{y})$$

$$= (2 + 3i)(2 - 3i)$$

$$= 13$$

10. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x - 1) = 0$ 의 두 근의 합은?



- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

해설

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로
 $f(x) = a(x+1)(x-3)$ ($a > 0$)으로 놓을 수 있다.

이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$ 이
므로

$$f(2x-1) = 0 \text{에서}$$

$$4ax(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 근의 합은 2이다.

11. n 이 자연수일 때, $x^{2n}(x^2 + ax + b)$ 를 $(x + 2)^2$ 으로 나눈 나머지가 $4^n(x + 2)$ 가 되도록 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

$$\begin{aligned}(\text{i}) \quad f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + b) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)\end{aligned}$$

$$f(-2) = 4^n(4 - 2a + b) = 0$$

$$\therefore b = 2a - 4$$

$$\begin{aligned}(\text{ii}) \quad f(x) &= x^{2n}(x^2 + ax + 2a - 4) \\ &= x^{2n}(x + 2)(x + a - 2) \\ &= (x + 2)^2 Q(x) + 4^n(x + 2)\end{aligned}$$

$$\therefore x^{2n}(x + a - 2) = (x + 2)Q(x) + 4^n$$

$x = -2$ 를 대입하면

$$4^n(-4 + a) = 4^n, -4 + a = 1$$

$$\therefore a = 5$$

$$b = 2a - 4 \text{ 에서 } b = 6$$

$$\therefore a + b = 11$$

12. $x_1^2 - 3x_1 = 7$ 이고, $x_2^2 - 3x_2 = 7$ 일 때, $x_1^3 + x_2^3$ 의 값은?

① 60

② 66

③ 72

④ 84

⑤ 90

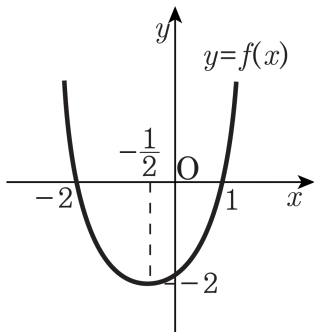
해설

x_1 과 x_2 는 $x^2 - 3x - 7 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수와의 관계로부터

$$x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -7$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ &= 3^3 - 3 \cdot (-7) \cdot 3 = 90 \end{aligned}$$

13. 다음 그림은 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 세 실근의 합은?



① $-\frac{5}{2}$

② $-\frac{3}{2}$

③ $-\frac{1}{2}$

④ 0

⑤ 1

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1 이므로

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = -2$ 또는 $f(x) = 1$

i) $f(x) = -2$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$

ii) $f(x) = 1$ 에서 $x = -\frac{1}{2} + \alpha$, $x = -\frac{1}{2} - \alpha$

따라서 모든 근의 합은

$$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(-\frac{1}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{2}$$

14. 방정식 $x^5 = 1$ 의 허근을 ω 라 하자. $\alpha = \omega + \frac{1}{\omega}$ 일 때 $\alpha^2 + \alpha$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^5 = 1, (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0$$

$$\therefore \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1 = 0$$

ω^2 으로 이 식을 나누면

$$\omega^2 + \omega + 1 + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = 0$$

$$\left(\omega^2 + \frac{1}{\omega^2}\right) + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0,$$

$$\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right)^2 - 2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 + \alpha - 1 = 0, \alpha^2 + \alpha = 1$$

15. $\frac{2x-3}{4}$ 의 절대값이 2보다 크고 6보다 작을 때, 만족하는 정수 x 의 모든 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

$$(1) 2 < \frac{2x-3}{4} < 6 \text{ 일 때,}$$

$$8 < 2x-3 < 24,$$

$$11 < 2x < 27,$$

$$\frac{11}{2} < x < \frac{27}{2}$$

$$\therefore x = 6, 7, 8, \dots, 13$$

$$(2) -6 < \frac{2x-3}{4} < -2 \text{ 일 때,}$$

$$-24 < 2x-3 < -8,$$

$$-21 < 2x < -5,$$

$$-\frac{21}{2} < x < -\frac{5}{2}$$

$$\therefore x = -10, -9, -8, \dots, -3$$

따라서 x 의 값의 합은 24이다.