

1. 연립부등식

$$\begin{cases} \frac{10-x}{4} \leq a \\ 6x-5 \leq 2x+1 \end{cases}$$
이 정수해를 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여

라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\frac{10-x}{4} \leq a, 10-x \leq 4a, x \geq -4a+10$$

$$6x-5 \leq 2x+1, 4x \leq 6, x \leq \frac{3}{2}$$

정수해를 갖기 위해서는

$$-4a+10 \leq 1$$

$$\therefore a \geq \frac{9}{4}$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

2. 연속하는 세 자연수의 합이 69 보다 크고 72 이하일 때, 세 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

▷ 정답 : 24

▷ 정답 : 25

해설

세 자연수를 $x-1$, x , $x+1$ 이라하면

$$69 < x-1+x+x+1 \leq 72$$

$$69 < 3x \leq 72$$

$$23 < x \leq 24$$

$$\therefore x = 24$$

따라서 연속하는 세 자연수는 23, 24, 25 이다.

3. 110 개의 노트를 학생들에게 8 권씩 나누어주면 노트가 남고, 9 권씩 나누어주면 노트가 부족하다. 이 때 학생의 수는 몇 명인지 구하여라.

▶ **답:** 명

▶ 정답: 13 명

해설

문제에서 구하고자 하는 학생의 수를 x 명이라고 놓자.

모든 학생이 노트를 8권씩 가지고 있을 때 전체 노트 수는 $8x$ 권이고, 모든 학생이 9권씩 가지고 있을 때 전체 노트 수는 $9x$ 권이다. 그러나 노트 수는 모든 학생이 8권씩 가질 때보다 많고, 모든 학생이 9권씩 가질 때보다 적으므로, 이를 식으로 나타내면 $8x < 110 < 9x$ 이다.

이를 연립부등식으로 표현하면
$$\begin{cases} 8x < 110 \\ 9x > 110 \end{cases}$$

간단히 하면, $\begin{cases} x < \frac{110}{8} \\ x > \frac{110}{9} \end{cases}$ 이다.

이를 다시 나타내면 $\frac{110}{9} < x < \frac{110}{8}$ 이다.

$\frac{110}{8} = 13.75$ 이고 $\frac{110}{9} = 12.2\cdots$ 이므로 학생의 수는 13 명이 가능하다.

4. 부등식 $|x+1|+|x-2|+1 < x+4$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$|x+1|+|x-2|+1 < x+4$$

i) $x < -1$

$$-x-1-x+2+1 < x+4, \quad x > -\frac{2}{3}$$

공통범위 없음

ii) $-1 \leq x < 2$

$$x+1-x+2+1 < x+4, \quad x > 0$$

공통범위 : $0 < x < 2 \rightarrow$ 정수 : 1

iii) $x \geq 2$

$$x+1+x-2+1 < x+4, \quad x < 4$$

공통범위 : $2 \leq x < 4 \rightarrow$ 정수 = 2, 3

$\therefore$ 정수 x 의 개수 : 1, 2, 3으로 3개

5. 부등식 $x^2 - 2x - 2 < 2|x - 1|$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\beta - \alpha$ 의 값은?

- ① 0 ② -2 ③ 2 ④ 6 ⑤ -6

해설

$x^2 - 2x - 2 < 2|x - 1|$ 에서 구간을 나누어 해를 구한다.

(i) $x \geq 1$ 일 때, $x^2 - 2x - 2 < 2(x - 1)$

$x^2 - 4x < 0$, $x(x - 4) < 0$, $0 < x < 4$

공통범위는 $1 \leq x < 4$

(ii) $x < 1$ 일 때, $x^2 - 2x - 2 < -2(x - 1)$

$x^2 - 4 < 0$, $-2 < x < 2$

공통범위는 $-2 < x < 1$

i + ii : $-2 < x < 4 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$

$\therefore \beta - \alpha = 4 - (-2) = 6$

6. 임의의 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax - a + 2 \geq 0$ 이 성립하기 위한 정수 a 의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$x^2 + 2ax - a + 2 \geq 0$ 이 항상 성립하기 위해서는

$$D/4 \leq 0$$

$$D/4 = a^2 + a - 2 = (a + 2)(a - 1) \leq 0$$

따라서 $-2 \leq a \leq 1$

$\therefore a = -2, -1, 0, 1$ (4개)

7. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다.
이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab = 6$

해설

$$ax^2 + 5x + b > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은

$$(x - 2)(x - 3) < 0 \text{ 전개하면}$$

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

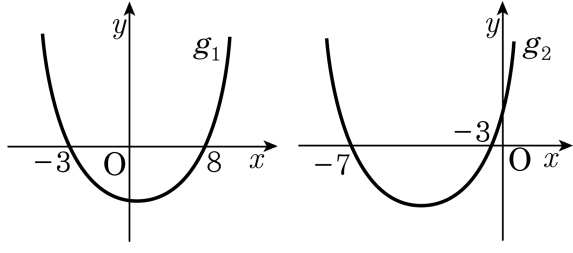
㉠과 일차항의 계수를 맞추기 위해

양변에 -1 을 곱하면

$$-x^2 + 5x - 6 > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

8. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
 g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
 을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
 g_2 의 일차항 $a = 10$
 ($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
 $x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
 $\therefore -12 < x < 2$
 따라서 만족하는 정수는 13 (개)

9. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

- ① $k < -1$ ② $-1 < k < 0$ ③ $k > 0$
④ $0 < k < 1$ ⑤ $k > 1$

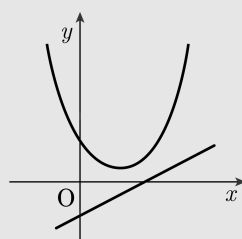
해설

포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면
위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여
부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 가 항상 성립
해야 한다.

즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서
판별식이 0 보다 작아야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$$

$$\therefore k < -1$$



10. 부등식 $x(x-1) < (x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는?

① $0 < x < 1$

② $x < 1$

③ $0 < x < 2$

④ $x > 2$

⑤ $1 < x < 3$

해설

i) $x(x-1) < (x-1)(x-2)$

$\Rightarrow 2x < 2 \rightarrow x < 1$

ii) $(x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$

$\Rightarrow 2x < 4$

$\Rightarrow x < 2$

i)과 ii)의 공통부분을 구하면

$\Rightarrow x < 1$

11. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leq 0 \\ (x+k)(x-1) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $1 < x \leq 6$ 이 되도록 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

- ① $k > 1$ ② $k \geq 1$ ③ $k < -1$
 ④ $k > -1$ ⑤ $k \geq -1$

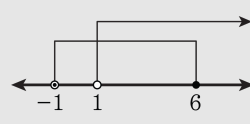
해설

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 6 &\leq 0, \\ (x-6)(x+1) &\leq 0, \\ -1 &\leq x \leq 6 \end{aligned}$$

연립방정식의 해가 $1 < x \leq 6$ 이 되려면

$(x+k)(x-1) > 0$ 의 해는 $x > 1$, $x < -k$ 이어야 하고

다음 그림에서 k 의 범위는 $-k \leq -1$, $k \geq 1$



12. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$ 이 $x < 1$ 에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 범위를 구하면 $a \leq k$ 이다. 이 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$ 라 놓으면

i) 축이 $x < 1$ 에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1, a < 2$

ii) $f(1) > 0, 1 - a + 9 > 0, a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$D = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0, a \geq 6, a \leq -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

13. 두 점 A(1,4), B(3,5) 와 x 축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 45 ② 43 ③ 41 ④ 39 ⑤ 37

해설

점 P 가 x 축 위의 점이므로 $P(x,0)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x-1)^2 + (-4)^2 + (x-3)^2 + (-5)^2 = 2x^2 - 8x + 51 \\ &= 2(x-2)^2 + 43\end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때, $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값은 43 이다.

14. 직선 $x + ay + 1 = 0$ 이 직선 $2x + by + 1 = 0$ 에 수직이고 직선 $x - (b - 1)y - 1 = 0$ 과 평행할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x + ay + 1 = 0, 2x + by + 1 = 0$ 이 서로 수직이므로

$$1 \cdot 2 + a \cdot b = 0 \quad \therefore ab = -2 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$$

두 직선 $x + ay + 1 = 0, x - (b - 1)y - 1 = 0$ 이 서로 평행하므로

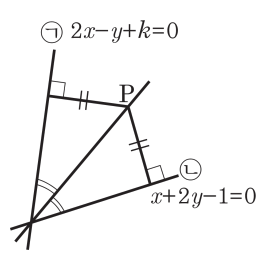
$$\frac{1}{1} = \frac{a}{1-b} \neq \frac{1}{-1} \quad \therefore a + b = 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{ 에서 } a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\therefore 1 - 2 \cdot (-2) = 5$$

15. 두 직선 $2x - y + k = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $P(3, 1)$ 을 지날 때, 상수 k 의 값의 합을 구하면?

- ① -2 ② 4 ③ -6
 ④ 8 ⑤ -10



해설

$$2x - y + k = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$x + 2y - 1 = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(점 P와 ㉠사이의 거리) = (점 P와 ㉡사이의 거리) 이므로

$$\frac{|6 - 1 + k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \Rightarrow |5 + k| = 4$$

$$\Rightarrow 5 + k = \pm 4 \Rightarrow k = -9 \text{ 또는 } k = -1$$

$$\therefore k \text{의 합} : -10$$

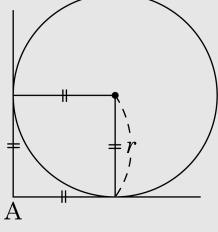
16. 좌표평면 위에 원 $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = r^2$ 과 원 밖의 점 A(2, 1)이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r 의 값은?

- ① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r 인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A까지의 거리는 $\sqrt{2}r$ 이 된다.

$\therefore \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2}r$
 $\therefore r = 3$



17. 평행이동 $(x, y) \rightarrow (x+a, y+b)$ 에 의하여 점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동했다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

점(3, 5)가 점(8, 20)으로 이동하려면 x 축 방향으로 +5, y 축 방향으로 +15만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a = 5$, $b = 15$

18. 직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 $f: (x, y) \rightarrow (x-2, y+1)$ 에 의하여 이동한 직선과 평행이동 $g: (x, y) \rightarrow (x+a, y-b)$ 에 의하여 이동한 직선이 일치할 때, a, b 에 대한 관계식을 구하면?

① $a = -2b$

② $a = -b$

③ $a = b$

④ $a = 2b$

⑤ $a = 3b$

해설

평행이동 $f: (x, y) \rightarrow (x-2, y+1)$ 은
 x 축의 방향으로 -2 만큼,
 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을
평행이동 f 에 의하여 이동하면
 $(x+2)+2(y-1)-3=0$
 $\therefore x+2y-3=0 \dots\dots\textcircled{\text{㉠}}$
또한, 평행이동 $g: (x, y) \rightarrow (x+a, y-b)$ 는
 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-b$ 만큼
평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 g 에 의하여 이동하면
 $(x-a)+2(y+b)-3=0$
 $\therefore x+2y-a+2b-3=0 \dots\dots\textcircled{\text{㉡}}$
이때, $\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}}$ 이 일치해야 하므로
 $-a+2b-3=-3 \quad \therefore a=2b$

19. 직선 $x-y+1=0$ 에 대하여 점 (1, 3) 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① (-1, -2)

② (1, -3)

③ (-1, 2)

④ (1, 3)

⑤ (2, 2)

해설

i) 대칭인 점을 (X, Y) 라 하면, (1, 3) 과 (X, Y) 를 잇는 선분은 $y = x + 1$ 에 수직이다

$$\Rightarrow \frac{Y-3}{X-1} = -1 \Rightarrow X+Y-4=0$$

ii) (1, 3) 과 (X, Y) 의 중점은 $y = x + 1$ 위에 있다

$$\Rightarrow \frac{Y+3}{2} = \frac{X+1}{2} + 1 \Rightarrow X-Y=0$$

i), ii) 를 연립하면, $X=2, Y=2$

$\therefore (2, 2)$

20. 연립부등식 $-1.2 < \frac{2x-a}{6} < -x$ 의 해가 $\frac{2}{5} < x < b$ 일때, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$-1.2 < \frac{2x-a}{6} < -x$$

$$\rightarrow \begin{cases} -7.2 < 2x-a \\ 2x-a < -6x \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > \frac{a-7.2}{2} \\ x < \frac{a}{8} \end{cases}$$

$$\frac{a-7.2}{2} < x < \frac{a}{8} \text{ 가 } \frac{2}{5} < x < b \text{ 이므로}$$

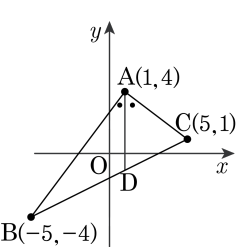
$$\frac{a-7.2}{2} = \frac{2}{5}$$

$$5a-36 = 4$$

$$\therefore a = 8$$

$$\therefore b = \frac{a}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

21. 다음 그림과 같이 세 점 $A(1, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(5, 1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



- ① $1 : 1$ ② $\sqrt{2} : 1$ ③ $\sqrt{3} : 1$
 ④ $2 : 1$ ⑤ $\sqrt{5} : 1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
 각의 이등분선정리에 의해

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2}}{\sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = 2 : 1$$

22. 평면상의 서로 다른 두 점 P, Q 에 대하여, 선분 $\overline{PQ}$ 의 3 등분점 중 P 에 가까운 쪽의 점을 $P*Q$ 로 나타낼 때, $A(1,2)$, $B(-2,3)$, $C(-1,-1)$ 에 대하여 점 $(A*B)*C$ 의 좌표를 구하면?

- ㉠ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$
 ㉡ $(-3, 4)$
 ㉢ $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\right)$
- ㉣ $(2, -1)$
 ㉤ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{7}{2}\right)$

해설

$P*Q$ 는 P, Q 의 1 : 2 내분점을 말한다.

$$\therefore (A*B) = \left(\frac{1 \times (-2) + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 3 + 2 \times 2}{1+2}\right) = \left(0, \frac{7}{3}\right)$$

$$\left(0, \frac{7}{3}\right) * C$$

$$= \left(\frac{1 \times (-1) + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times (-1) + 2 \times \frac{7}{3}}{1+2}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$$

$$(A*B)*C = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{9}\right)$$

23. 점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = 3x + 2$ ($-1 \leq x \leq 2$) 위를 움직일 때, 점 $Q(a + b, a - b)$ 가 나타내는 자취의 길이는?

- ① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

해설

점 $P(a, b)$ 가 직선 $y = 3x + 2$ 위의 점이므로
 $b = 3a + 2$ (단, $-1 \leq a \leq 2$)... ㉠
이 때, 점 $Q(a + b, a - b)$ 에서
 $a + b = X, a - b = Y$ 로 놓고
 a, b 를 X, Y 로 나타내면
 $a = \frac{X + Y}{2}, b = \frac{X - Y}{2}$
이것을 ㉠에 대입하면
 $\frac{X - Y}{2} = \frac{3X + 3Y}{2} + 2$
 $\therefore X + 2Y + 2 = 0$
한편, $X = a + b = a + (3a + 2) = 4a + 2$ 이고
 $-1 \leq a \leq 2$ 이므로 $-2 \leq 4a + 2 \leq 10$
 $\therefore -2 \leq X \leq 10$
따라서 점 $Q(x, y)$ 는
직선 $x + 2y + 2 = 0$ (단, $-2 \leq x \leq 10$) 위를 움직인다.
그런데 $x = -2$ 일 때, $y = 0$
 $x = 10$ 일 때, $y = -6$ 이므로
구하는 자취의 길이는 두 점 $(-2, 0), (10, -6)$ 을 이은 선분의 길
이와 같다.
 $\therefore \sqrt{(10 + 2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$

24. 좌표평면 위의 세 점 $A(1, 4)$, $B(-4, -1)$, $C(1, 0)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 직선 $y = k$ 가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $4 - \sqrt{5}$

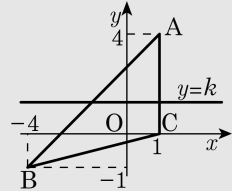
② $4 - \sqrt{6}$

③ $4 - \sqrt{7}$

④ $4 - 2\sqrt{2}$

⑤ $4 - \sqrt{10}$

해설



$$\triangle ABC \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$$

$$\overline{AB} \text{의 방정식을 구하면, } y = \frac{-1-4}{-4-1}(x-1) + 4$$

$$\Rightarrow y = x + 3$$

$$\therefore y = k \text{와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 } (k-3, k), (1, k)$$

$\Rightarrow$ 이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

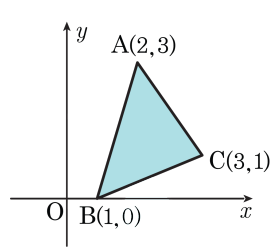
$$\frac{1}{2} \times (1 - (k-3)) \times (4-k) = 5$$

$$\text{방정식을 풀면, } k = 4 \pm \sqrt{10}$$

$$\therefore k = 4 - \sqrt{10} \quad (\because k < 4)$$

25. 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

- ① $-1 \leq m \leq 3$ ② $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$
 ③ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ ④ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 3$
 ⑤ $1 \leq m \leq 3$



해설

직선 $y = -mx - m + 2$ 에서 $mx + y + m - 2 = 0$

$m(x + 1) + y - 2 = 0$ 이므로

점 $P(-1, 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 $\triangle ABC$ 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

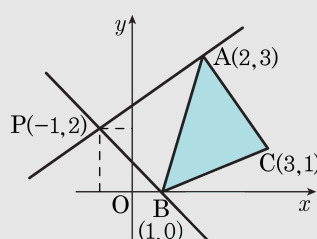
(직선 PB 의 기울기) $\leq -m \leq$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1} = -1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2} = \frac{1}{3}$

$-1 \leq -m \leq \frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$



26. (a, b) 가 직선 $x+y=1$ 위를 움직이는 점이라 할 때 직선 $ax+by=1$ 은 정점을 지난다. 그 정점의 좌표는?

- ① $(1, 1)$ ② $(1, 0)$ ③ $(0, 1)$
④ $(-1, -1)$ ⑤ $(-1, 0)$

해설

점 (a, b) 가 $x+y-1=0$ 위의 점이므로
 $a+b-1=0$ 에서 $b=1-a$
이때, $ax+by-1=ax+(1-a)y-1=0$
 $\rightarrow (x-y)a+y-1=0$
 $\therefore x-y=0, y-1=0$
즉 $x=y, y=1$
따라서 구하려는 정점은 $(1, 1)$ 이다.

27. 두 점 A(-1, 3), B(2, a)를
지나는 직선이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접할 때, a의 값은?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

두 점 A(-1, 3), B(2, a)를
지나는 직선의 방정식은, $y - 3 = \frac{a - 3}{3}(x + 1)$
 $\therefore (a - 3)x - 3y + a + 6 = 0 \dots\dots\textcircled{\text{A}}$
직선 $\textcircled{\text{A}}$ 이 원 $x^2 + y^2 = 1$ 과 접하므로
원의 중심 (0, 0) 에서 직선 $\textcircled{\text{A}}$ 에 이르는 거리가
원의 반지름의 길이인 1 과 같다.
 $\therefore \frac{|a + 6|}{\sqrt{(a - 3)^2 + 9}} = 1$
 $\therefore |a + 6| = \sqrt{(a - 3)^2 + 9} \dots\dots\textcircled{\text{B}}$
 $\textcircled{\text{B}}$ 의 양변을 제곱하면 $a^2 + 12a + 36 = a^2 - 6a + 9 + 9, 18a = -18$
 $\therefore a = -1$

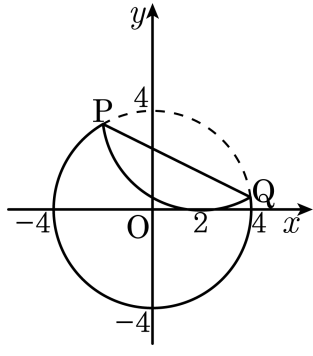
28. 점 A(3, 5) 와 원 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}$ 의 최솟값과 최댓값의 합은?

- ① 6
- ② 7
- ③ 8
- ④ 9
- ⑤ 10

해설

원 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ 의 중심이 $(-1, 2)$ 이므로
점 A 와 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - 5)^2} = 5$
이 때, 원의 반지름의 길이는 2 이므로
 $(\overline{AP}$ 의 최댓값) = 5 + (반지름의 길이) = 5 + 2 = 7
 $(\overline{AP}$ 의 최솟값) = 5 - (반지름의 길이) = 5 - 2 = 3
따라서 구하는 합은 $7 + 3 = 10$

29. 다음 그림과 같이 원 $x^2 + y^2 = 16$ 을 점 $(2, 0)$ 에서 x 축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편을 구하여라.

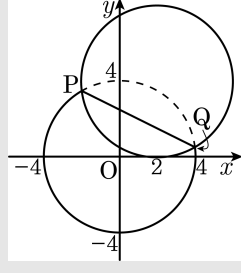


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2, 0)$ 에서 x 와 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ //



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2 + y^2 = 16$, $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ 의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$$x^2 + y^2 - 16 - \{(x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 16\} = 0$$

$$\therefore x + 2y - 5 = 0$$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x 절편은 5이다.

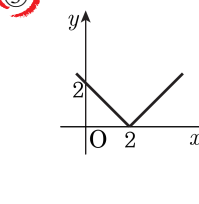
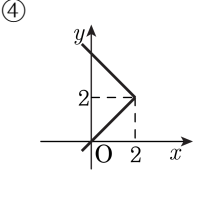
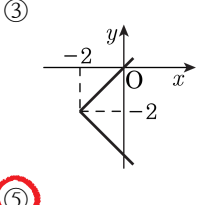
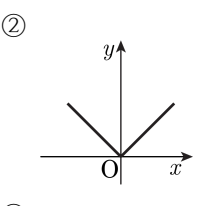
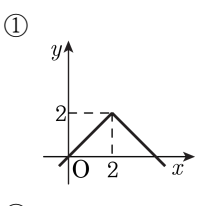
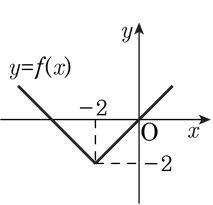
30. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 1), B(4, 2)와 x 축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 길이의 최솟값은?

① 3 ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 4

해설

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 점 A(1, 1)을 직선 x 축에 대하여 대칭이
동하여 옮겨진 점 A'(1, -1)와 점 B(4, 2) 사이의 직선거리인
 $\overline{A'B}$ 이므로 $\sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$

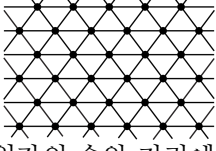
31. 다음 그림은 함수의 그래프이다. 다음 중 $y = f(-x) + 2$ 의 그래프를 나타낸 것은?



해설

$y = f(-x) + 2$ 의 그래프는 주어진 그래프를 y 축에 대칭시킨 후 y 축으로 2만큼 평행 이동 한 것이다.

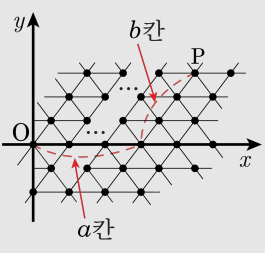
32. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 다음 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?



- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

다음 그림과 같이 좌표축을 잡아서
점 O 에서 우측으로 a 칸
위상쪽으로 b 칸 이동한 점 P 를 생각
하자.



$$\begin{aligned} \text{이 때 } \overline{OP}^2 &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 \\ &= a^2 + ab + b^2 = 7 \\ 4a^2 + 4ab + 4b^2 &= (2a+b)^2 + 3b^2 = 28 \\ \text{가능한 } 3b^2 &= 0, 3, 12, 27 \text{ 일 때} \\ (2a+b)^2 &= 28, 25, 16, 1 \end{aligned}$$

33. 두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 가 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a + b = c + d$

② $a + c = b + d$

③ $ab = cd$

④ $ac = bd$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

$\overline{AB}$ 는 $y = mx$ 에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{d-b}{c-a} \times m = -1$$

$$\Rightarrow (a-c) = m(d-b) \cdots \textcircled{1}$$

그리고 $\overline{AB}$ 의 중점은 $y = mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2} = m \left(\frac{a+c}{2} \right)$$

$$\Rightarrow b+d = m(a+c) \cdots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$a-c = \frac{b+d}{a+c} (d-a)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$