1. 연립부등식

$$\begin{cases} \dfrac{10-x}{4} \leq a \\ 6x-5 \leq 2x+1 \end{cases}$$

이 정수해를 가질 때, 정수 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{10-x}{4} \leq a,\ 10-x \leq 4a, x \geq -4a+10$

$6x-5 \leq 2x+1,\ 4x \leq 6, x \leq \dfrac{3}{2}$

정수해를 갖기 위해서는

$-4a+10 \leq 1$

$\therefore a \geq \dfrac{9}{4}$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3 이다.

2. 연속하는 세 자연수의 합이 69 보다 크고 72 이하일 때, 세 수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 23

▷ 정답 : 24

▷ 정답 : 25

해설

세 자연수를 $x-1$, x , $x+1$ 이라하면

$69 < x-1+x+x+1 \leq 72$

$69 < 3x \leq 72$

$23 < x \leq 24$

$\therefore \quad x = 24$

따라서 연속하는 세 자연수는 $23, 24, 25$ 이다.

3. 110 개의 노트를 학생들에게 8 권씩 나누어주면 노트가 남고, 9 권씩 나누어주면 노트가 부족하다. 이 때 학생의 수는 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: ______ 명

▷ 정답: 13 명

해설

문제에서 구하고자 하는 학생의 수를 x 명이라고 놓자.
모든 학생이 노트를 8 권씩 가지고 있을 때 전체 노트 수는 $8x$ 권이고, 모든 학생이 9 권씩 가지고 있을 때 전체 노트 수는 $9x$ 권이다. 그러나 노트 수는 모든 학생이 8 권씩 가질 때보다 많고, 모든 학생이 9 권씩 가질 때보다 적으므로, 이를 식으로 나타내면 $8x < 110 < 9x$ 이다.

이를 연립부등식으로 표현하면 $\begin{cases} 8x < 110 \\ 9x > 110 \end{cases}$

간단히 하면, $\begin{cases} x < \dfrac{110}{8} \\ x > \dfrac{110}{9} \end{cases}$ 이다.

이를 다시 나타내면 $\dfrac{110}{9} < x < \dfrac{110}{8}$ 이다.

$\dfrac{110}{8} = 13.75$ 이고 $\dfrac{110}{9} = 12.2\cdots$ 이므로 학생의 수는 13 명이 가능하다.

4. 부등식 $|x+1|+|x-2|+1<x+4$을 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$|x+1|+|x-2|+1<x+4$

i) $x<-1$

$$-x-1-x+2+1<x+4,\ \ x>-\frac{2}{3}$$

공통범위 없음

ii) $-1\le x<2$

$x+1-x+2+1<x+4,\ \ x>0$

공통범위 : $0<x<2\rightarrow$ 정수 : 1

iii) $x\ge 2$

$x+1+x-2+1<x+4,\ \ x<4$

공통범위 : $2\le x<4\rightarrow$ 정수$=2,\ 3$

$\therefore$ 정수 x의 개수 : 1, 2, 3으로 3개

5. 부등식 $x^2-2x-2<2|x-1|$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값은?

① 0　② -2　③ 2　④ 6　⑤ -6

해설

$x^2-2x-2<2|x-1|$에서 구간을 나누어 해를 구한다.

(ⅰ) $x\geq 1$일 때, $x^2-2x-2<2(x-1)$

$x^2-4x<0,\ x(x-4)<0,\ 0<x<4$

공통범위는 $1\leq x<4$

(ⅱ) $x<1$일 때, $x^2-2x-2<-2(x-1)$

$x^2-4<0,\ -2<x<2$

공통범위는 $-2<x<1$

ⅰ + ⅱ : $-2<x<4 \Leftrightarrow \alpha<x<\beta$

$\therefore \beta-\alpha=4-(-2)=6$

6. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax-a+2\geq 0$이 성립하기 위한 정수 a의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$x^2+2ax-a+2\geq 0$이 항상 성립하기 위해서는

$D/4\leq 0$

$D/4=a^2+a-2=(a+2)(a-1)\leq 0$

따라서 $-2\leq a\leq 1$

$\therefore a=-2,\ -1,\ 0,\ 1$ (4개)

7. 부등식 $ax^2+5x+b>0$ 을 풀어서 $2<x<3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=6$

해설

$ax^2+5x+b>0 \quad \cdots\cdots ㉠$

해가 $2<x<3$ 이 되는 이차부등식은

$(x-2)(x-3)<0$ 전개하면

$x^2-5x+6<0 \quad \cdots\cdots ㉡$

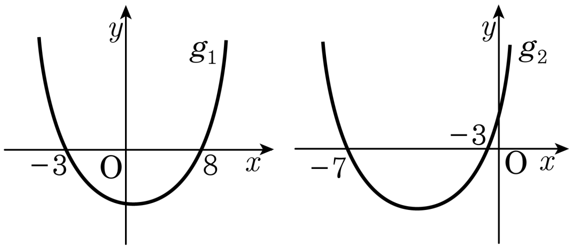
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해

양변에 -1 을 곱하면

$-x^2+5x-6>0 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a=-1$, $b=-6$

8. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로

g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)

을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로

g_2 의 일차항 $a = 10$

($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\dfrac{a}{2} = -5$)

이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면

$x^2 + 10x - 24 < 0,\ (x + 12)(x - 2) < 0$

$\therefore -12 < x < 2$

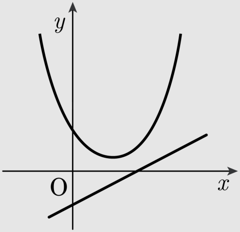
따라서 만족하는 정수는 13 (개)

9. 포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있도록 실수 k 의 범위를 구하면?

① $k < -1$　　② $-1 < k < 0$　　③ $k > 0$

④ $0 < k < 1$　　⑤ $k > 1$

해설



포물선 $y = x^2 - 2x + 3$ 이 직선 $y = 2x + k$ 보다 위쪽에 있으려면
위 그림에서 모든 실수 x 에 대하여
부등식 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$가 항상 성립해야 한다.
즉 $x^2 - 4x + 3 - k > 0$ 에서
판별식이 0 보다 작아야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4 - (3 - k) < 0$$

$\therefore\ k < -1$

10. 부등식 $x(x-1) < (x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$ 을 만족시키는 x 의 값의 범위는?

① $0 < x < 1$　② $x < 1$　③ $0 < x < 2$

④ $x > 2$　⑤ $1 < x < 3$

해설

ⅰ) $x(x-1) < (x-1)(x-2)$

$\Rightarrow 2x < 2 \rightarrow x < 1$

ⅱ) $(x-1)(x-2) < (x-2)(x-3)$

$\Rightarrow 2x < 4$

$\Rightarrow x < 2$

ⅰ)과 ⅱ)의 공통부분을 구하면

$\Rightarrow x < 1$

11. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \le 0 \\ (x+k)(x-1) > 0 \end{cases}$ 의 해가 $1 < x \le 6$ 이 되도록 실수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k > 1$　　② $k \ge 1$　　③ $k < -1$

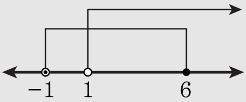
④ $k > -1$　　⑤ $k \ge -1$

해설

$x^2 - 5x - 6 \le 0$,

$(x-6)(x+1) \le 0$,

$-1 \le x \le 6$



연립방정식의 해가 $1 < x \le 6$이 되려면

$(x+k)(x-1) > 0$의 해는 $x > 1$, $x < -k$이어야 하고

다음 그림에서 k의 범위는 $-k \le -1$, $k \ge 1$

12. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \leq k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0$, $a \geq 6$, $a \leq -6$

따라서 i), ii), iii) 에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

13. 두 점 $\mathrm{A}(1,4)$, $\mathrm{B}(3,5)$ 와 x 축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$ 의 최솟값을 구하면?

① 45 ② 43 ③ 41 ④ 39 ⑤ 37

해설

점 P 가 x 축 위의 점이므로 $\mathrm{P}(x,0)$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 = (x-1)^2 + (-4)^2 + (x-3)^2 + (-5)^2 = 2x^2 - 8x + 51$

$= 2(x-2)^2 + 43$

따라서 $x = 2$ 일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$ 의 최솟값은 43이다.

14. 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $2x+by+1=0$에 수직이고 직선 $x-(b-1)y-1=0$과 평행할 때, a^2+b^2의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

두 직선 $x+ay+1=0$, $2x+by+1=0$이 서로 수직이므로

$1\cdot 2+a\cdot b=0 \quad \therefore\ ab=-2\cdots$ ㉠

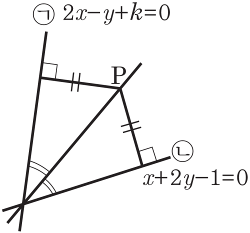
두 직선 $x+ay+1=0$, $x-(b-1)y-1=0$이 서로 평행하므로

$\frac{1}{1}=\frac{a}{1-b}\neq\frac{1}{-1} \quad \therefore\ a+b=1\cdots$ ㉡

㉠, ㉡ 에서 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$\therefore\ 1-2\cdot(-2)=5$

15. 두 직선 $2x-y+k=0$, $x+2y-1=0$ 이 이루는 각의 이등분선이 점 $P(3,\ 1)$을 지날 때, 상수 k의 값의 합을 구하면?



① -2 ② 4 ③ -6

④ 8 ⑤ -10

해설

$2x-y+k=0 \quad \cdots ㉠$

$x+2y-1=0 \quad \cdots ㉡$

(점 P와 ㉠사이의 거리)= (점 P와 ㉡사이의 거리)이므로

$$\frac{|6-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|3+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} \Rightarrow |5+k|=4$$

$\Rightarrow 5+k=\pm 4 \Rightarrow k=-9$ 또는 $k=-1$

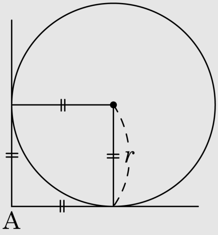
$\therefore k$ 의 합 : -10

16. 좌표평면 위에 원 $(x-5)^2+(y-4)^2=r^2$과 원 밖의 점 A$(2,\ 1)$이 있다. 점 A 에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은?

① 3 ② $\sqrt{10}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

해설

두 접선이 서로 수직이면 그림처럼 한 변이 r인 정사각형이 된다.
따라서 원 중심에서 A 까지의 거리는 $\sqrt{2}r$이 된다.



$\therefore\ \sqrt{(5-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{2}r$

$\therefore\ r=3$

17. 평행이동 $(x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+b)$에 의하여 점$(3,\ 5)$가 점$(8,\ 20)$으로 이동했다고 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

해설

점$(3,\ 5)$가 점$(8,\ 20)$으로 이동하려면 x축 방향으로 $+5$, y축 방향으로 $+15$만큼 평행이동 해야 한다. 따라서 $a=5,\ b=15$

18. 직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 $f:(x,\ y)\to(x-2,\ y+1)$ 에 의하여 이동한 직선과 평행이동 $g:(x,\ y)\to(x+a,\ y-b)$ 에 의하여 이동한 직선이 일치할 때, $a,\ b$ 에 대한 관계식을 구하면?

① $a=-2b$ ② $a=-b$ ③ $a=b$

④ $a=2b$ ⑤ $a=3b$

해설

평행이동 $f:(x,\ y)\to(x-2,\ y+1)$ 은
x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을
평행이동 f 에 의하여 이동하면
$(x+2)+2(y-1)-3=0$
$\therefore x+2y-3=0 \cdots\cdots$ ㉠
또한, 평행이동 $g:(x,y)\to(x+a,y-b)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 $-b$ 만큼
평행이동하는 것이므로
직선 $x+2y-3=0$ 을 평행이동 g 에 의하여 이동하면
$(x-a)+2(y+b)-3=0$
$\therefore x+2y-a+2b-3=0 \cdots\cdots$ ㉡
이때, ㉠, ㉡이 일치해야 하므로
$-a+2b-3=-3 \quad \therefore a=2b$

19. 직선 $x-y+1=0$ 에 대하여 점 $(1,\ 3)$ 과 대칭인 점의 좌표를 구하면?

① $(-1,\ -2)$ ② $(1,\ -3)$ ③ $(-1,\ 2)$

④ $(1,\ 3)$ ⑤ $(2,\ 2)$

해설

i) 대칭인 점을 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 라 하면, $(1,\ 3)$ 과 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 를 잇는 선분은 $y=x+1$ 에 수직이다

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Y}-3}{\mathrm{X}-1}=-1 \Rightarrow \mathrm{X}+\mathrm{Y}-4=0$$

ii) $(1,\ 3)$ 과 $(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ 의 중점은 $y=x+1$ 위에 있다

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Y}+3}{2}=\frac{\mathrm{X}+1}{2}+1 \Rightarrow \mathrm{X}-\mathrm{Y}=0$$

i), ii) 를 연립하면, $\mathrm{X}=2,\ \mathrm{Y}=2$

$\therefore\ (2,\ 2)$

20. 연립부등식 $-1.2 < \frac{2x-a}{6} < -x$ 의 해가 $\frac{2}{5} < x < b$ 일때, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$-1.2 < \frac{2x-a}{6} < -x$$

$$\rightarrow \begin{cases} -7.2 < 2x-a \\ 2x-a < -6x \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x > \frac{a-7.2}{2} \\ x < \frac{a}{8} \end{cases}$$

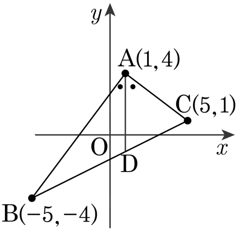
$\frac{a-7.2}{2} < x < \frac{a}{8}$ 가 $\frac{2}{5} < x < b$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a-7.2}{2} &= \frac{2}{5} \\ 5a-36 &= 4 \end{aligned}$$

$$\therefore\ a = 8$$

$$\therefore\ b = \frac{a}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

21. 다음 그림과 같이 세점 $A(1,4)$, $B(-5,-4)$, $C(5,1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



① 1 : 1　② $\sqrt{2}$: 1　③ $\sqrt{3}$: 1

④ 2 : 1　⑤ $\sqrt{5}$: 1

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고

각의 이등분선정리에 의해

$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$

$\overline{AB} = \sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2} = \sqrt{100} = 10$

$\overline{AC} = \sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore\ \triangle ABC : \triangle ACD = 2 : 1$

22. 평면상의 서로 다른 두 점 P, Q 에 대하여, 선분 $\overline{PQ}$ 의 3 등분점 중 P 에 가까운 쪽의 점을 $P*Q$ 로 나타낼 때, $A(1,2)$, $B(-2,3)$, $C(-1,-1)$ 에 대하여 점 $(A*B)*C$ 의 좌표를 구하면?

① $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{11}{9}\right)$　② $(-3,\ 4)$　③ $\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{3}\right)$
④ $(2,\ -1)$　⑤ $\left(-\frac{4}{3},\ \frac{7}{2}\right)$

해설

$P*Q$ 는 P, Q 의 $1:2$ 내분점을 말한다.

$$\therefore (A*B)=\left(\frac{1\times(-2)+2\times 1}{1+2},\ \frac{1\times 3+2\times 2}{1+2}\right)=\left(0,\frac{7}{3}\right)$$

$$\left(0,\frac{7}{3}\right)*C$$

$$=\left(\frac{1\times(-1)+2\times 0}{1+2},\ \frac{1\times(-1)+2\times\frac{7}{3}}{1+2}\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{3},\frac{11}{9}\right)$$

$$(A*B)*C=\left(-\frac{1}{3},\frac{11}{9}\right)$$

23. 점 $\mathrm{P}(a,b)$가 직선 $y=3x+2(-1\le x\le 2)$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{Q}(a+b,a-b)$가 나타내는 자취의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$가 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로

$b=3a+2$(단, $-1\le a\le 2$) $\cdots$ ㉠

이 때, 점 $\mathrm{Q}\,(a+b,a-b)$에서

$a+b=X$, $a-b=Y$로 놓고

a,b를 X,Y로 나타내면

$$a=\frac{X+Y}{2},\ b=\frac{X-Y}{2}$$

이것을 ㉠에 대입하면

$$\frac{X-Y}{2}=\frac{3X+3Y}{2}+2$$

$\therefore X+2Y+2=0$

한편, $X=a+b=a+(3a+2)=4a+2$이고

$-1\le a\le 2$이므로 $-2\le 4a+2\le 10$

$\therefore -2\le X\le 10$

따라서 점 $\mathrm{Q}\,(x,y)$는

직선 $x+2y+2=0$ (단, $-2\le x\le 10$) 위를 움직인다.

그런데 $x=-2$일 때, $y=0$

$x=10$일 때, $y=-6$이므로

구하는 자취의 길이는 두 점 $(-2,0)$, $(10,-6)$을 이은 선분의 길이와 같다.

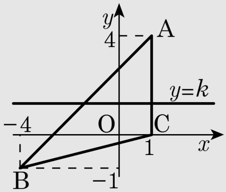
$$\therefore\ \sqrt{(10+2)^2+(-6)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$$

24. 좌표평면 위의 세 점 $A(1,4)$, $B(-4,-1)$, $C(1,0)$ 을 꼭지점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 직선 $y=k$가 이등분할 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $4-\sqrt{5}$ ② $4-\sqrt{6}$ ③ $4-\sqrt{7}$

④ $4-2\sqrt{2}$ ⑤ $4-\sqrt{10}$

해설



$\triangle ABC$ 의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 4\times 5=10$

$\overline{AB}$ 의 방정식을 구하면, $y=\frac{-1-4}{-4-1}(x-1)+4$

$\Rightarrow \quad y=x+3$

$\therefore \quad y=k$와 삼각형이 만나는 점의 좌표는 $(k-3,\ k)$, $(1,\ k)$

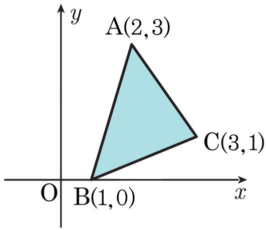
$\Rightarrow$ 이등분된 위쪽 삼각형 넓이를 구해보면

$\frac{1}{2}\times(1-(k-3))\times(4-k)=5$

방정식을 풀면, $k=4\pm\sqrt{10}$

$\therefore \quad k=4-\sqrt{10}\ (\because \ k<4)$

25. 직선 $y=-mx-m+2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

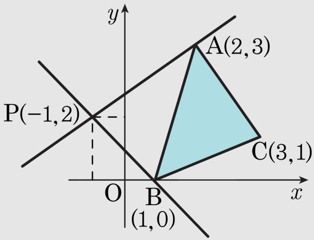


① $-1 \le m \le 3$ ② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$ ④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$

⑤ $1 \le m \le 3$

해설



직선 $y=-mx-m+2$ 에서 $mx+y+m-2=0$

$m(x+1)+y-2=0$ 이므로

점 P$(-1,\ 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y=-mx-m+2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1}=-1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2}=\frac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \frac{1}{3}$

$\therefore\ -\frac{1}{3} \le m \le 1$

26. $(a,\ b)$가 직선 $x+y=1$ 위를 움직이는 점이라 할 때 직선 $ax+by=1$은 정점을 지난다. 그 정점의 좌표는?

① $(1,\ 1)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(0,\ 1)$

④ $(-1,\ -1)$ ⑤ $(-1,\ 0)$

해설

점 $(a,\ b)$가 $x+y-1=0$ 위의 점이므로

$a+b-1=0$에서 $b=1-a$

이때, $ax+by-1=ax+(1-a)y-1=0$

$\rightarrow (x-y)a+y-1=0$

$\therefore\ x-y=0,\ y-1=0$

즉 $x=y,\ y=1$

따라서 구하려는 정점은 $(1,\ 1)$이다.

27. 두 점 $\mathrm{A}(-1,3)$, $\mathrm{B}(2,a)$를
지나는 직선이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접할 때, a의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

두 점 $\mathrm{A}(-1,3)$, $\mathrm{B}(2,a)$ 를

지나는 직선의 방정식은, $y-3=\dfrac{a-3}{3}(x+1)$

$\therefore\ (a-3)x-3y+a+6=0\ \cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 원 $x^2+y^2=1$ 과 접하므로

원의 중심 $(0,0)$ 에서 직선 ㉠에 이르는 거리가

원의 반지름의 길이인 1 과 같다.

$\therefore\ \dfrac{|a+6|}{\sqrt{(a-3)^2+9}}=1$

$\therefore\ |a+6|=\sqrt{(a-3)^2+9}\ \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 양변을 제곱하면 $a^2+12a+36=a^2-6a+9+9$,$18a=-18$

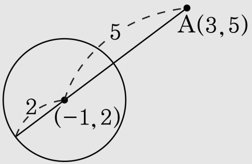
$\therefore\ a=-1$

28. 점 A(3, 5) 와 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최솟값과 최댓값의 합은?

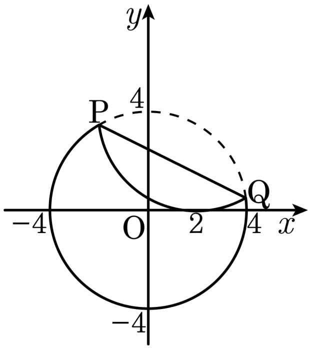
① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

원 $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ 의 중심이
$(-1,\ 2)$ 이므로
점 A 와 원의 중심 사이의 거리는
$\sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2}=5$
이 때, 원의 반지름의 길이는 2 이므로
($\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최댓값)$=5+$ (반지름의 길이)$=5+2=7$
($\overline{\mathrm{AP}}$ 의 최솟값)$=5-$ (반지름의 길이)$=5-2=3$
따라서 구하는 합은 $7+3=10$



29. 다음 그림과 같이 원 $x^2+y^2=16$을 점 $(2,0)$에서 x축과 접하도록 접었을 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편을 구하여라.

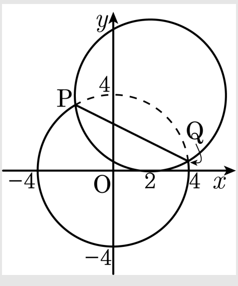


▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

호 PQ는 그림과 같이 점 $(2,0)$에서 x과 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 원의 방정식은 $(x-2)^2+(y-4)^2=16//$



이때 선분 PQ는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.

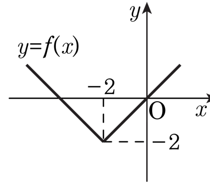
30. 좌표평면 위의 두 점 $A(1,\ 1)$, $B(4,\ 2)$와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 길이의 최솟값은?

① 3 ② $3\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 4

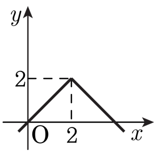
해설

$\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 점 $A(1,\ 1)$을 직선 x축에 대하여 대칭이동하여 옮겨진 점 $A'(1,\ -1)$ 와 점 $B(4,\ 2)$ 사이의 직선거리인 $\overline{A'B}$이므로 $\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$

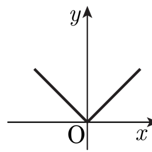
31. 다음 그림은 함수의 그래프이다. 다음 중 $y = f(-x) + 2$ 의 그래프를 나타낸 것은?



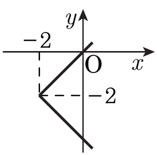
①



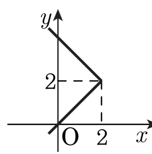
②



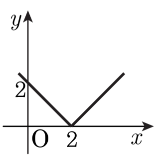
③



④



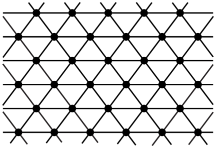
⑤



해설

$y = f(-x) + 2$ 의 그래프는 주어진 그래프를 y 축에 대칭시킨 후 y 축으로 2 만큼 평행 이동 한 것이다.

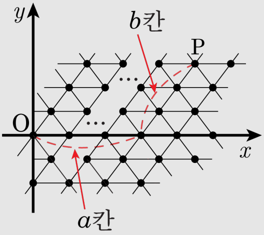
32. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 다음 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1 일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?



① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

다음 그림과 같이 좌표축을 잡아서 점 O 에서 우측으로 a 칸 우상쪽으로 b 칸 이동한 점 P 를 생각하자.



이 때 $\overline{\mathrm{OP}}^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$

$= a^2 + ab + b^2 = 7$

$4a^2+4ab+4b^2 = (2a+b)^2+3b^2 = 28$

가능한 $3b^2 = 0, 3, 12, 27$ 일 때

$(2a+b)^2 = 28, 25, 16, 1$

33. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(c,\ d)$ 가 직선 $y = mx$ 에 대하여 대칭일 때, 다음 중 m 의 값에 관계 없이 항상 성립하는 것은?

① $a + b = c + d$ ② $a + c = b + d$

③ $ab = cd$ ④ $ac = bd$

⑤ $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$

해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 는 $y = mx$ 에 수직한다.

$$\Rightarrow \frac{d-b}{c-a} \times m = -1$$

$\Rightarrow (a-c) = m(d-b) \cdots$ ①

그리고 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 $y = mx$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{b+d}{2} = m\left(\frac{a+c}{2}\right)$$

$\Rightarrow b + d = \ \ m(a+c) \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$$a - c = \frac{b+d}{a+c}(d-a)$$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$