1. 등식 $2x^2-3x-2=a(x-1)(x-2)+bx(x-2)+cx(x-1)$ 이 x에 관한 항등식이 되도록 할 때, $2ab$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 2 ⑤ 4

해설

양변에 $x=0$을 대입하면, $-2=2a$ $\therefore\ a=-1$
양변에 $x=1$을 대입하면, $-3=-b$ $\therefore\ b=3$
$\therefore\ 2ab=-6$

2. 세 개의 다항식 $x^3+ax+b,\ x^3+cx^2+a,\ cx^2+bx+4,$ 의 공약수 중 하나가 $x-1$일 때, $a+b+c$의 값은?

① 2 ② -2 ③ 3 ④ -3 ⑤ 4

해설

$f(x)=x^3+ax+b \rightarrow\ f(1)=1+a+b=0\cdots$㉠

$g(x)=x^3+cx^2+a \rightarrow\ g(1)=1+c+a=0\cdots$㉡

$h(x)=cx^2+bx+4 \rightarrow\ h(1)=c+b+4=0\cdots$㉢

㉠ + ㉡ + ㉢에서 $2(a+b+c)+6=0$

$\therefore\ a+b+c=-3$

3. $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + i$ 일 때, $z_1^3 + z_2^3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 2i$ ② 0 ③ 20

④ $-2 + 4i$ ⑤ -4

해설

$$z_1 + z_2 = 2,\ z_1 z_2 = 2$$

$$\begin{aligned} z_1^3 + z_2^3 &= (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) \\ &= 8 - 12 \\ &= -4 \end{aligned}$$

4. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}\times(-2)=1$

5. 길이가 6 인 선분을 같은 방향으로 2 : 1 로 내분하는 점과 외분하는 점 사이의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

길이가 6 인 선분을 OA 라 하고,
O 를 원점으로 잡으면 A 의 좌표는 $(6, 0)$
이 선분을 2 : 1 로 내분하는 점 $\mathrm{P}(x_1)$ 라 하면

$$x_1 = \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2 + 1} = 4$$

2 : 1 로 외분하는 점 $\mathrm{Q}(x_2)$ 라 하면

$$x_2 = \frac{2 \times 6 - 1 \times 0}{2 - 1} = 12$$

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} = 12 - 4 = 8$

6. 다항식 $f(x)=4x^3+ax^2+x+1$을 $x+\frac{1}{2}$로 나누면 나머지가 1일 때, 다항식 $f(x)$를 $2x+1$로 나눈 몫 $Q(x)$와 나머지 R을 구하면?

① $Q(x)=2x^2-x,\ R=1$

② $Q(x)=2x^2+x,\ R=1$

③ $Q(x)=2x^2-2x,\ R=1$

④ $Q(x)=4x^2-2x,\ R=\frac{1}{2}$

⑤ $Q(x)=4x^2+2x,\ R=\frac{1}{2}$

해설

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=1=\frac{a}{4}\therefore a=4$

따라서 $f(x)=4x^3+4x^2+x+1$

$=x(4x^2+4x+1)+1$

$=x(2x+1)^2+1$

$2x+1$로 나누면 $Q(x)=2x^2+x,\ R=1$

7. $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$를 전개할 때, 각 항의 계수의 총합을 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 8　② 15　③ 24　④ 36　⑤ 47

해설

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)$
$= (x^2+x-2)(x^2+x-12)(x^2+x = X(\text{치환}))$
$= (X-2)(X-12)$
$= X^2-14X+24$
$= (x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$
$= x^4+2x^3-13x^2-14x+24$
$\therefore\ a = 1+2-13-14+24 = 0,\ b = 24$
$\therefore\ a+b = 0+24 = 24$

해설

㉠ 각 항 계수의 총합 구하기
$x = 1$ 대입, $a = 0$
㉡ 상수항 구하기
$x = 0$ 대입, $b = 24$

8. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1} = k$라 놓으면

$2x+ay-b = k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0,\ a+k=0,\ -b+k=0$

$\therefore\ k=2,\ a=-2,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-4$

9. $|x-2|+|x-3|=1$을 만족하는 실수 x의 개수는?

① 0개　　② 1개　　③ 2개

④ 3개　　⑤ 4개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$에서

i) $x<2$일 때,

$-(x-2)-(x-3)=1$

$\therefore\ x=2$ (성립하지 않음)

ii) $2\le x<3$일 때,

$(x-2)-(x-3)=1$

$\therefore\ 0\cdot x=0$ (모든 실수)

iii) $x\ge 3$일 때,

$(x-2)+(x-3)=1$

$\therefore\ x=3$

10. 이차방정식 $(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 해는 $x=a$ 또는 $x=p+qi$이다. 이 때, $a+p+q$의 값을 구하여라. (단, a, p, q는 실수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(1-i)x^2+(-3+i)x+2=0$의 양변에 $1+i$를 곱하면

$(1+i)(1-i)x^2+(1+i)(-3+i)x+2(1+i)=0$

$2x^2-2(2+i)x+2(1+i)=0$

$x^2-(2+i)x+1+i=0$

$(x-1)\{x-(1+i)\}=0$

$x=1$ 또는 $x=1+i$

$\therefore a+p+q=3$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b의 값은?

① $a=1,\ b=1$

② $a=1,\ b=0$

③ $a=0,\ b=1$

④ $a=-1,\ b=0$

⑤ $a=-1,\ b=-1$

해설

$\frac{D}{4}=0$이므로,

$(k-a)^2-(k^2+a^2-b+1)=0$

$-2ak+(b-1)=0$

$\therefore\ a=0, b=1$

12. 이차방정식 $4x^2 - ax + 2a = 0$의 두 근의 합과 곱을 두 근으로 하는 이차방정식이 $2x^2 - bx + 1 = 0$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a > 0$)

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

두 근이 α, β일 때,

$\alpha + \beta = \dfrac{a}{4}$, $\alpha\beta = \dfrac{a}{2}$

$\dfrac{a}{4}$, $\dfrac{a}{2}$가 $2x^2 - bx + 1 = 0$의 두 근이므로

$\dfrac{a}{4} \times \dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{1}{2}$

$a^2 = 4$, $a = 2$ $(a > 0)$

$\dfrac{a}{4} + \dfrac{a}{2} = \dfrac{b}{2}$, $b = 3$

$\therefore\ a + b = 3 + 2 = 5$

13. 종섭이와 성제가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 을 각각 풀었다. 종섭이는 x 의 계수를 잘못 봐서 $3-2i,\ 3+2i$ 라는 근을 구했고, 성제는 상수항을 잘못 봐서 $2-i,\ 2+i$ 라는 근을 구했을 때, $\left|\dfrac{bc}{a^2}\right|$ 의 값은?

▶ 답 :

▷ 정답 : 52

해설

종섭이는 x 의 계수를 잘못 보았으므로 상수항은 참이다.

두 근의 곱 $=\dfrac{c}{a}=(3-2i)(3+2i)=9+4=13$

성제는 상수항을 잘못 보았으므로 x 의 계수는 참이다.

두 근의 합$=-\dfrac{b}{a}=2-i+2+i=4$

$\therefore \left|\dfrac{bc}{a^2}\right|=\left|\dfrac{b}{a}\times\dfrac{c}{a}\right|=|-4\times 13|=|-52|=52$

14. 3km 떨어진 두 마을 ㄱ, ㄴ이 있다. ㄱ마을에는 100명의 학생이, ㄴ마을에는 50명의 학생이 있다. ㄱ, ㄴ두 마을 사이에 학교를 세울 때 통학거리의 합이 최소가 되려면 어디에 학교를 세워야 하는가?

① ㄱ마을

② ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 1km지점

③ 가운데

④ ㄱ마을에서 ㄴ마을 쪽으로 2km지점

⑤ ㄴ마을

해설

ㄱ마을에서 $x$km 떨어진 곳에 학교를 세운다면 ㄴ마을 으로부터는 $(3-x)$km 떨어져 있다. 통학거리의 합 S 는 $S=100x+50(3-x)$
$=150+50x$
$x \geq 0$ 이므로 $x=0$ 일 때 S 는 최소가 된다. 즉, ㄱ마을에 학교를 세우면 된다.

15. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+99^2$ 을 계산하여라.

① 99 ② 100 ③ 4950

④ 5050 ⑤ 10000

해설

$1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-\cdots+99^2$

$=99^2-98^2+97^2-96^2+\cdots+3^2-2^2+1^2$

$=(99^2-98^2)+(97^2-96^2)+$

$\cdots+(3^2-2^2)+1^2$

$=(99-98)(99+98)+(97-96)(97+96)+\cdots+(3-2)(3+2)+1$

$=(99+98)+(97+96)+\cdots+(3+2)+1$

$=1+2+3+\cdots+99$

$=(1+99)+(2+98)+\cdots+(49+51)+50$

$=4950$

16. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x+y=2+3i$ 라 할 때, $x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$ 의 값은?

① 13　　② $11+2i$　　③ 12

④ $12-i$　　⑤ 11

해설

$x+y=2+3i$, $\overline{x}+\overline{y}=2-3i$

$x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$

$=x(\overline{x}+\overline{y})+y(\overline{x}+\overline{y}))$

$=(x+y)(\overline{x}+\overline{y})$

$=(2+3i)(2-3i)$

$=13$

17. $x=1$ 일 때 최솟값 1 을 갖고, y 절편이 2 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$y=a(x-1)^2+1$$
$$=a(x^2-2x+1)+1$$
$$=ax^2-2ax+a+1$$
$$a+1=2,\ \ a=1$$
$$y=(x-1)^2+1$$
$$p=1, q=1$$
$$\therefore apq=1$$

18. 이차함수 $y = x^2 + kx + k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 1

해설

$$y = x^2 + kx + k = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \frac{k^2}{4} + k$$

최솟값 $m = -\dfrac{k^2}{4} + k$

$$m = -\frac{k^2}{4} + k = -\frac{1}{4}(k-2)^2 + 1$$

$k = 2$ 일 때, m 은 최댓값 1 을 갖는다.

19. $\begin{cases} |x| + x + y = 10 \\ x + |y| - y = 12 \end{cases}$ 일 때, $x+y$의 값은?

① -2　② 2　③ $\frac{18}{5}$　④ $\frac{22}{3}$　⑤ 22

해설

$|x| + x + y = 10$ ……㉠

$x + |y| - y = 12$ ……㉡

$x \le 0$ 이면, $y = 10$, $x = 12$

이것은 $x \le 0$을 만족하지 않는다.

$x > 0$ 이면 $2x + y = 10$……㉢

$y \ge 0$ 이면 $x = 12$, $y = -14$

이것은 $y \ge 0$을 만족하지 않는다.

$y < 0$ 이면, $x - 2y = 12$……㉣

㉢, ㉣에서 $x = \frac{32}{5}$, $y = -\frac{14}{5}$

$\therefore\ x + y = \frac{18}{5}$

20. x에 대한 두 이차방정식 $x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$이 한 개의 공통근 α를 가지고, 공통이 아닌 두 근의 비가 $3:5$일 때, $a-b$의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ 0

해설

공통근이 α이므로 $\alpha^2+a\alpha+b=0\cdots$㉠

$\alpha^2+b\alpha+a=0\cdots$㉡

㉠−㉡에서 $(a-b)(\alpha-1)=0$

$a=b$이면 모순이므로 $a\neq b$ $\therefore\ \alpha=1$

$x^2+ax+b=0$, $x^2+bx+a=0$의 공통이 아닌 근을 각각 β, γ라 하면 근과 계수와의 관계에 의하여 $1\cdot\beta=b$, $1\cdot\gamma=a$

따라서, 공통이 아닌 두 근의 비는

$\beta:\gamma=b:a=3:5\cdots$㉢

한편, ㉠에 $\alpha=1$을 대입하면 $a+b+1=0\cdots$㉣

㉢, ㉣에서 $a=-\frac{5}{8}$, $b=-\frac{3}{8}$

$\therefore\ a-b=-\frac{1}{4}$

21. 모든 x에 대하여 $f(x+1)-f(x-1)=6x^2+6$, $f(0)=1$을 만족시키는 다항식 $f(x)$가 있다. 다음은 자연수 n에 대하여 $(x+\alpha)^n = x^n + n\alpha x^{n-1} + \cdots + \alpha^n$을 이용하여, $f(x)$를 구하는 과정이다.

> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$(단, $a_n \neq 0$)라고 놓으면
> $f(x+1)-f(x-1)$
> $= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\} + \cdots + a_1\{(x+1)-(x-1)\}$
> $= \boxed{}\,x^{n-1} + \cdots = 6x^2+6$
> 에서 $n=3$, $a_n=1$
> $\therefore\ f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 1$
> $f(x+1)-f(x-1) = 6x^2 + 4a_2x + 2 + 2a_1$
> 이므로 $a_2=0$, $a_1=2$ 즉, $f(x) = x^3+2x+1$

위의 풀이 과정에서 $\boxed{}$에 알맞은 것은?

① a_n　② $2a_n$　③ na_n　④ $2na_n$　⑤ $3na_n$

해설

$f(x+1)-f(x-1)$

$= a_n\{(x+1)^n-(x-1)^n\} + a_{n-1}\{(x+1)^{n-1}-(x-1)^{n-1}\}\cdots$

$= a_n\{(x^n+nx^{n-1}+\cdots)-(x^n-nx^{n-1}+\cdots)\} + a_{n-1}\{(x^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots)-(x^{n-1}-(n-1)x^{n-2}+\cdots)\}+\cdots$

$= a_n(2nx^{n-1}+\cdots) + a_{n-1}\{2(n-1)x^{n-2}+\cdots\}+\cdots$

$= 2na_nx^{n-1} + \{(n-2)$차 이하의 다항식$\}$

$\therefore\ 2na_nx^{n-1} = 6x^2$ 에서

$n-1=2$, $2na_n=6$

$\therefore\ n=3$, $a_n=1$

22. 두 다항식 x^3+ax^2+bx+1과 x^3+bx^2+ax+1의 최대공약수가 일차식일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$A(x)=x^3+ax^2+bx+1$, $B(x)=x^3+bx^2+ax+1$로 놓으면

$A(x)-B(x)$

$=(x^3+ax^2+bx+1)-(x^3+bx^2+ax+1)$

$=(a-b)x(x-1)$

$A(x)$, $B(x)$의 최고차항의 계수가 1 이므로 최대공약수는 x 이거나 $x-1$ 이 될 수 있지만 두 다항식의 상수항이 1이므로 최대공약수는 $x-1$ 이다.

따라서 다항식 $A(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 가지므로 나머지정리에 의하여

$A(1)=1+a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-2$

23. 길이 3인 선분 AB의 양 끝점 A, B가 각각 x축, y축 위를 움직일 때, 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 자취를 구하면?

① $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ ② $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$ ③ $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

④ $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ ⑤ $x^2+3y^2=6$

해설

A$(a,\ 0)$, B$(0,\ b)$, P$(x,\ y)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=3$이므로 $\sqrt{a^2+b^2}=3$

$a^2+b^2=9\cdots$ ㉠

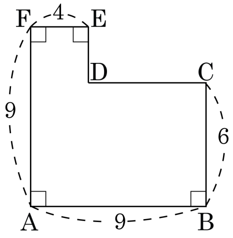
P$(x,\ y)$는 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점이므로 $x=\dfrac{a}{3}$, $y=\dfrac{2b}{3}$

$\therefore\ a=3x,\ b=\dfrac{3y}{2}\cdots$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면 $9x^2+\dfrac{9}{4}y^2=9$

$\therefore\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

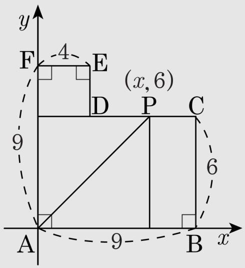
24. 아래 그림과 같은 도형 ABCDEF가 있다. 변 CD 위에 한 점 P를 잡아 선분 AP를 그었더니 선분 AP에 의해 도형의 넓이가 이등분되었다. 이 때, 선분 AP의 길이를 구하면?



① $\sqrt{83}$　　② $\sqrt{84}$　　③ $\sqrt{85}$　　④ $\sqrt{86}$　　⑤ $\sqrt{87}$

해설

그림과 같이 좌표평면 위에서 변 AB가 x축,
점 A가 원점이 되도록 하고, $\mathrm{P}(x,\ 6)$이라고 하면
$\overline{\mathrm{PC}} = 9 - x$이다.
이 때, 도형 ABCDEF의 넓이는 66이므로
사다리꼴 ABCP의 넓이는 33이다.



$\frac{1}{2} \times 6 \times \{9 + (9 - x)\} = 33$에서 $x = 7$이다.

$\therefore \overline{\mathrm{AP}} = \sqrt{(7-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{85}$

25. 좌표평면 위의 점 P(4, 9)를 지나고 x절편과 y절편, 기울기가 모두 정수인 직선의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

점 P(4, 9)를 지나는 직선의 기울기를
m이라 하면
직선의 방정식은 $y-9=m(x-4)\cdots$ ㉠
x절편 : ㉠에 $y=0$을 대입하면
$-9=m(x-4)$
$\therefore\ x=4-\dfrac{9}{m}$
y절편 : ㉠에 $x=0$을 대입하면
$y-9=-4m$
$\therefore\ y=9-4m$
따라서 x절편, y절편이 모두 정수가 되기위해서는 m의 값은 9의 약수(음수 포함)이어야 한다.
따라서 $m=1,\ 3,\ 9,\ -1,\ -3,\ -9$
$\therefore$ 직선은 6개 존재한다.