1. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2-xy(y-x)=(x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2-27b^2=3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3-125=(4a+5)(16a^2-20a+25)$

④ $(x^2-x)(x^2-x+1)-6=(x^2-x+3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2-5x+3=(x-1)(2x-3)$

해설

$64a^3-125$

$=(4a)^3-(5)^3$

$=(4a-5)\left(16a^2+20a+25\right)$

2. x^6+1을 계수가 실수인 범위 내에서 인수분해 할 때, 다음 중 인수인 것은?

① x^2+x+1 ② x^2-x+1 ③ $x^2+\sqrt{3}x+1$

④ $x^2+\sqrt{3}x-1$ ⑤ x^2-1

해설

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (x^2)^3+1 \\
&= (x^2+1)(x^4-x^2+1) \\
&= (x^2+1)\{(x^2+1)^2-3x^2\} \\
&= (x^2+1)(x^2-\sqrt{3}x+1)(x^2+\sqrt{3}x+1)
\end{aligned}
$$

3. 다음 중 $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$ 을 옳게 인수분해 한 것은?

① $(a-b)^2(a+b)^2$

② $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

③ $(a-b)^2(a^2+b^2)$

④ $(a^2-b^2)(a+b)^2$

⑤ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)^2$

해설

$$\begin{aligned}&\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2\\&=\left(a^2+b^2-2ab\right)\left(a^2+b^2+2ab\right)\\&=(a-b)^2(a+b)^2\end{aligned}$$

4. $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$ ② $-(a+b+c)(a-b-c)$

③ $-(a+b)(b+c)(c+a)$ ④ $(a+b)(b+c)(c+a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c-a)$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리한 후, 인수분해 한다.

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

5. 다음 중 $x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18$ 의 인수가 아닌 것은?

① $x-1$ ② $x+1$ ③ $x-3$ ④ $x+3$ ⑤ $x+2$

해설

준식을 인수정리와 조립제법을 이용하여 정리하면
$(x-1)(x-3)(x+2)(x+3) = 0$
※ 최고차항의 계수가 1 인 다항식에서 인수정리를 사용할 때, 상수항의 약수 중에서 대입하여 0 이 되는 정수를 찾아본다.

6. 두 다항식 x^3+2x^2-x-2,
$(x-1)(3x^2+ax+2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-3$

해설

$x^3+2x^2-x-2=(x-1)(x+2)(x+1)$
$\therefore 3x^2+ax+2a$는
$x+2$ 또는 $x+1$을 인수로 가져야 한다.
$f(x)=3x^2+ax+2a$로 놓을 때
$x+2$가 인수이면 $f(-2)=12-2a+2a=12$가 되어 적합하지 않다.
$\therefore x+1$를 인수로 갖는다.
$x+1$이 인수이면 $f(-1)=3-a+2a=3+a=0$
$\therefore a=-3$

7. 세 다항식 $f(x)=x^2+x-2$, $g(x)=2x^2+3x-2$, $h(x)=x^2+mx+8$의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m=6$

해설

$f(x)=(x+2)(x-1)$

$g(x)=(x+2)(2x-1)$ 이므로

$f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $x+2$

이것이 $h(x)$ 의 약수이어야 하므로

$h(-2)=4-2m+8=0$

$\therefore\ m=6$

8. 자연수 a, b의 최대공약수를 (a, b)로 나타낼 때, 다음과 같은 성질이 알려져 있다.

a를 b로 나누었을 때 몫을 q, 나머지를 r라고 하면 $a = bq + r\ (0 \leq r < b)$이고, 이 때, $(a,\ b) = (b,\ r)$가 성립한다.

다음은 위의 성질을 이용하여 1996과 240의 최대공약수를 구하는 과정이다. (가), (나)에 알맞은 것은?

$(1996, 240) = (240,$ (가)$) = ($(가)$, 12) = (12,$ (나)$) =$ (나)

① (가)$= 74$, (나)$= 2$　　② (가)$= 72$, (나)$= 6$

③ (가)$= 78$, (나)$= 2$　　④ (가)$= 76$, (나)$= 6$

⑤ (가)$= 76$, (나)$= 4$

해설

$1996 = 240 \cdot 8 + 76,\ 240 = 76 \cdot 3 + 12$

$76 = 12 \cdot 6 + 4$ 이므로

$(1996,\ 240) = (240,\ 76) = (76,\ 12) = (12,\ 4) = 4$

9. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값을 정하면?

① -1 ② 1 ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$

$=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-k$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-k$

$x^2+5x=X$로 치환하면

$(\text{준식})=(X+4)(X+6)-k$

$=X^2+10X+24-k$

완전제곱식이 되려면 $24-k=25$

$\therefore\ k=-1$

10. x^4+3x^2+4를 바르게 인수분해한 것은?

① $(x^2+x+1)(x^2-2x+1)$ ② $(x^2+2x+2)(x^2-x+2)$

③ $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$ ④ $(x^2+x-1)(x^2-2x+1)$

⑤ $(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

해설

$$\begin{aligned} x^4+3x^2+4 &= (x^4+4x^2+4)-x^2 \\ &= (x^2+2)^2-x^2 \\ &= (x^2+x+2)(x^2-x+2) \end{aligned}$$

11. a, b, c가 $\triangle ABC$의 세변의 길이를 나타낼 때, 다음 등식 $a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$을 만족하는 삼각형의 모양은?

① 직삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 직각이등변삼각형

⑤ 이등변삼각형 또는 직각삼각형

해설

$a^3+a^2b-ab^2-a^2c+b^2c-b^3=0$

$a^2(a+b)-b^2(a+b)-c(a^2-b^2)=0$

$(a+b)(a^2-ac+bc-b^2)=0$

$(a+b)\{((a-b)(a+b)-c(a-b)\}=0$

$(a+b)(a-b)(a+b-c)=0$

$a+b>0, a+b-c>0$이므로 $a=b$

$\therefore a=b$인 이등변삼각형

12. $198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$를 간단히 하면?

① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$198=x, 200=y, 202=z$라 하면

$198^3+200^3+202^3-3\cdot198\cdot200\cdot202$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times600\times24$

$=7200$

13. $a+b+c=1$을 만족하는 세 실수 a, b, c에 대하여 $x=a-2b+3c$,$y=b-2c+3a$, $z=c-2a+3b$라 할 때, $(x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$a+b+c=1$이므로

$x+y+z=2a+2b+2c=2(a+b+c)=2$

$\therefore\ (x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+3$

$=(x+y+z)^2+3$

$=2^2+3=4+3=7$

14. $a(a+1)=1$ 일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$$

$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$$

$$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a\text{ 대입}$$

$$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$$

15. $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$가 다음 조건을 만족할 때, $ab - c + d$의 값은?

㉠ $f(x)$, $g(x)$의 최소공배수는 $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$이다.
㉡ $f(1) = -4$, $g(0) = 5$

① -31　② -11　③ 5　④ 13　⑤ 29

해설

두 다항식의 최소공배수

$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x+5)(x-3)$에서

인수들 중 적당한 두 인수들로 $f(1) = -4$,

$g(0) = 5$이 되도록 $f(x), g(x)$를 만들면

$f(x) = (x+1)(x-3) = x^2 - 2x - 3$

$g(x) = (x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$

$a = -2, b = -3, c = 6, d = 5$

$\therefore\ ab - c + d = 5$

16. 최고차항의 계수가 1인 두 이차다항식 A, B에 대하여 A, B의 최대공약수를 $(A,\ B)$, A, B의 최소공배수를 $[A,\ B]$라 하자. 다항식 A, B가

$$\boxed{(A+B,\ A-B) = 2x-3,\ [A+B,\ A-B] = 2x^2+x-6}$$

을 만족할 때, $2[A,\ B]=0$과 같은 해를 갖는 것은?

① $2x^3+5x^2-6x-9$ ② x^3+4x^2-2x-7

③ x^3-3x^2+5x-1 ④ $3x^3-x^2+2x-1$

⑤ $-x^3+2x^2-5x+7$

해설

$A=aG,\ B=bG\ (a,b$는 서로소$)$라 하자.

$(A+B, A-B) = ((a+b)G,\ (a-b)G) = 2x-3$ 이므로

G는 $2x-3$

따라서 A,B는 $2x-3$으로 나누어떨어지고 a, b는 일차식이다.

또 $[A+B, A-B] = [(a+b)G, (a-b)G] = 2x^2+x-6$

$=(x+2)(2x-3)$ 이므로 $(a+b)(a-b)G = (x+2)(2x-3)$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = x+2$ 이고

a, b는 모두 일차식이므로

$a+b=x+2,\ a-b=1$ 이라 하고 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2},$$

$$b=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ [A,B] = \left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)(2x-3)$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}\right)(2x-3)$$

$$=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{8}{4}x^2-3x+\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$$

$$=\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$$

$$\therefore\ 2[A,B] = x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-\frac{9}{2}$$

따라서 $2[A,B]$와 같은 것은 ① $2x^3+5x^2-6x-9$ 이다.

17. $\dfrac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)}{bx+ay}+\dfrac{ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2+b^2y^2$

② $(ax+by)^2$

③ $(bx+ay)^2$

④ $2(a^2x^2+b^2y^2)$

⑤ $(ax+by)(bx+ay)$

해설

(분자)$=bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)$

$=bx(a^2x^2+b^2y^2)+2a^2bxy^2+ay(a^2x^2+b^2y^2)+2ab^2x^2y$

$=(a^2x^2+b^2y^2)(bx+ay)+2abxy(ay+bx)$

$=(bx+ay)(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=(bx+ay)(ax+by)^2$

따라서, (준 식)$=(ax+by)^2$

18. 다음 식 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a+b$ ② $b+c$ ③ $c+a$

④ $b-a$ ⑤ $-b-c$

해설

전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하면

$(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)\left\{a^2+(b+c)a+bc\right\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$\therefore$ ④ $b-a$는 인수가 아니다

19. 다음 중 $\left(\dfrac{997}{1000}\right)^3+\left(\dfrac{3}{1000}\right)^3-1$의 값과 같은 것은?

① $\dfrac{3^2\times 997^3}{10}$ ② $\dfrac{3^2\times 997^6}{10}$ ③ $-\dfrac{3^2\times 997^3}{10}$

④ $-\dfrac{3^2\times 997}{10^6}$ ⑤ $-\dfrac{3^2\times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\dfrac{997}{1000}$과 $\dfrac{3}{1000}$을 더해보면 $\dfrac{997+3}{1000}=1$이므로

$a=\dfrac{997}{1000},\ b=\dfrac{3}{100},\ c=-1$이라 하면

$a+b+c=0$이 된다.

따라서 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$에서 $a^3+b^3+c^3=3abc$

임을 이용하면

$a^3+b^3+c^3=\left(\dfrac{997}{1000}\right)^3+\left(\dfrac{3}{1000}\right)^3+(-1)^3$의 값은

$3abc=3\times\dfrac{997}{1000}\times\dfrac{3}{1000}\times(-1)$와 같으므로

구하는 값은

$3\times\dfrac{997}{1000}\times\dfrac{3}{1000}\times(-1)=-\dfrac{3^2\times 997}{10^6}$

20. x 에 관한 두 삼차식 $P = x^3 + ax^2 + 2x - 1$, $Q = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수를 가질 때, $2a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$P - Q = (a-b)x^2 + 2x - 2 \cdots$ ㉠

$P + Q = x\left\{2x^2 + (a+b)x + 2\right\} \cdots$ ㉡

P, Q 의 최대공약수를 G 라 하면,

G 는 $P - Q$ 와 $P + Q$ 의 공약수이다.

그런데 G 는 이차이고, P, Q 에는

x 라는 약수가 없으므로 ㉠, ㉡에서 G 는

$(a-b)x^2 + 2x - 2$ 이고 $2x^2 + (a+b)x + 2$ 이다.

$\therefore\ a - b = -2,\ a + b = -2$

$\therefore\ a = -2,\ b = 0$

$\therefore\ 2a + b = -4$