1. 세 점 A $(1, 5)$, B $(-4, -7)$, C $(5, 2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$ 에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0, 0)$
② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$
③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$
⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 5$

따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$

D 는 B , C 를 $13 : 5$ 로 내분한 점

$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. 두 직선 $2x-y-3=0$, $x+y-3=0$ 의 교점을 지나고 $(0,0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 $ax+by=0$ 이라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(2x-y-3)+k(x+y-3)=0$ 으로 나타낼 수 있다.
이 때, $(0,\ 0)$ 을 지나므로
$(-3)+k(-3)=0 \qquad \therefore\ k=-1$
$(2x-y-3)+(-1)(x+y-3)=0$ 을 정리하면
$\therefore\ x-2y=0$
$a=1,\ b=-2 \qquad \therefore\ a-b=1-(-2)=3$

3. 좌표평면 위의 두 점 A, B 사이의 거리를 $\star(A, B)$ 라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\star(A, B) \geq 0$

② $\star(A, B) = \star(B, A)$

③ $\star(A, B) = \star(A, C)$ 이면 두 점 B, C 는 일치한다.

④ $\star(A, B) = 0$ 이면 두 점 A, B는 일치한다.

⑤ 세 점 A, B, C 에 대하여 항상 관계식
$\star(A, B) + \star(B, C) \geq \star(A, C)$ 가 성립한다.

해설

① 거리는 음의 수가 나올 수 없으므로 참
② 좌변과 우변 모두 A와 B 사이의 거리이므로 참
③ A로 부터 같은 거리에 있는 점은 수없이 많으므로 거짓
④ 거리가 0이므로 동일한 점이므로 참
⑤ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 의 합은 $\overline{AC}$ 보다 같거나 크므로 참

4. 두 점 $\mathrm{A}(-2, 1)$, $\mathrm{B}(4, 5)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표는?

① $\left(0, \frac{1}{2}\right)$　② $\left(0, \frac{5}{2}\right)$　③ $\left(0, \frac{9}{2}\right)$
④ $\left(0, \frac{13}{2}\right)$　⑤ $\left(0, \frac{17}{2}\right)$

해설

y축 위의 점 P의 좌표를 $(0, a)$라 하면
$\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$이므로

$$\sqrt{\{0-(-2)\}^2+(a-1)^2}$$
$$= \sqrt{(0-4)^2+(a-5)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2-2a+5 = a^2-10a+41$$
$$8a = 36$$
$$\therefore a = \frac{9}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(0, \frac{9}{2}\right)$이다.

5. 좌표평면 위의 세 점 $A(4,\ -2)$, $B(1,\ 7)$, $C(-2,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② 이등변삼각형
③ 직각삼각형
④ 예각삼각형
⑤ 직각이등변삼각형

해설

세변의 길이는

$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + \{7-(-2)\}^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

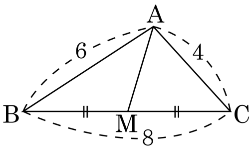
$\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45}$

$= 3\sqrt{5}$

따라서 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$이고, $\overline{BC} = \overline{CA}$이므로 직각이등변삼각형이다.

6. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

7. 좌표평면 위의 점 A$(1,\ 2)$에서 x축 위의 점 P를 지나 점 B$(5,\ 1)$를 지나는 최단 경로의 거리는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 7 ⑤ 8

해설

점 A를 x축에 대해 대칭시키는
새로운 점 A$'(1, -2)$에 대해
선분 A$'$B의 거리를 구하면 된다.
$\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(5-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{25} = 5$

8. 두 점 $\mathrm{A}(2,3), \mathrm{B}(3,4)$에 대하여 점 P가 x축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최소값은?

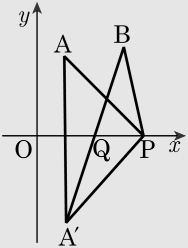
① $\sqrt{15}$ ② 7 ③ $5\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{53}$

해설

점 $\mathrm{A}(2,3)$과 x축에 대하여 대칭인 점은 $\mathrm{A}'(2,-3)$이다. 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{A'B}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 $\mathrm{A'B}$의 길이와 같다.



$\mathrm{A}'(2,\ -3), \mathrm{B}(3,\ 4)$

$$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(3-2)^2+(4-(-3))^2}$$

$$=\sqrt{50}$$

$$=5\sqrt{2}$$

9. 두 점 $A(-2,\ 6)$, $B(2,\ -4)$를 잇는 선분을 $t : 1-t$ 로 내분하는 점이 제 4사분면에 있도록 t의 값의 범위를 정하면?

① $t > \dfrac{1}{2}$ ② $t > \dfrac{3}{5}$ ③ $t > \dfrac{3}{4}$ ④ $t < \dfrac{2}{5}$ ⑤ $t < \dfrac{1}{6}$

해설

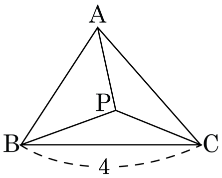
내분점 $(2t+(1-t)(-2),\ -4t+(1-t)6) = (4t-2,\ -10t+6)$

$\therefore\ 4t-2>0$ 이고 $-10t+6<0$

$\therefore\ t > \dfrac{1}{2}$ 이고 $t > \dfrac{3}{5}$

$\therefore\ t > \dfrac{3}{5}$

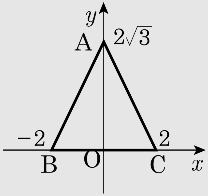
10. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC의 임의의 내부의 한 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 의 최솟값은?



① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

해설

다음 그림과 같이 직선 BC를 x축,
$\overline{BC}$의 중점을 원점 O,
직선 AO를 y축으로 잡으면



$A\left(0, 2\sqrt{3}\right), B(-2, 0), C(2, 0)$

$P(x, y)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=x^2+\left(y-2\sqrt{3}\right)^2+(x+2)^2+y^2+(x-2)^2+y^2$

$=3x^2+3y^2-4\sqrt{3}y+20$

$=3x^2+3\left(y-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2+16$

따라서 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 은

$x=0, y=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때, 최솟값 16을 갖는다.

11. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 $30°$의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}+2=0$

$\therefore b=-\sqrt{3},\ c=2+\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ b+c=2$

12. A $(1, 1)$, B $(-2, -3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$$\therefore \quad \frac{-3-1}{-2-1} = \frac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$$

$$\Rightarrow \quad \therefore \; k = 4$$

13. 두 점 A$(1,\ 3)$, B$(4,\ 0)$ 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\dfrac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times4-2\times1}{1-2}, \dfrac{1\times0-2\times3}{1-2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2,\ 6)$ 을 지나므로

$y-6 = 1\cdot(x+2),\ \ y = x+8$

$a = 1,\ b = 8 \quad \therefore a + b = 9$

14. $x+ay+1=0$이 $2x-by+1=0$과는 수직이고 직선 $x-(b-3)y-1=0$과는 평행일 때, a^2+b^2의 값은 ?

① 5 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 15

해설

$x+ay+1=0 \quad \cdots ㉠$

$2x-by+1=0 \quad \cdots ㉡$

$x-(b-3)y-1=0 \cdots ㉢$

㉠, ㉡ 은 수직이므로,

$1\times 2+a(-b)=0 \quad \therefore \ ab=2$

㉠, ㉢ 은 평행이므로 $a=-(b-3)$

$\therefore \ a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=5$

15. 두 직선 $x-2y+3=0, 5x+ky-2=0$ 이 수직일 때와 평행일 때의 k 값들의 곱은?

① -10 ② $-\frac{15}{2}$ ③ -25 ④ 10 ⑤ 25

해설

$x-2y+3=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$5x+ky-2=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{k}x+\frac{2}{k}$

$\Rightarrow$ 수직 : $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{5}{k}\right)=-1 \quad \therefore k=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow$ 평행 : $\frac{1}{2}=-\frac{5}{k} \quad \therefore k=-10$

$\therefore \frac{5}{2}\times(-10)=-25$

16. 두 직선 $ax+y=-3$, $2x+(a-1)y=6$이 평행할 때의 a값을 α, 일치할 때의 a값을 β라 할 때, $2\alpha+\beta$의 값은?

① -3 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 6

해설

두 직선이 평행하려면 기울기는 같고 y절편이 다르다.

$$\Rightarrow \; y=-ax-3, \quad y=-\frac{2}{a-1}x+\frac{6}{a-1}$$

$$\Rightarrow \; a=\frac{2}{a-1}, \quad a=2, -1 \quad \therefore \; a=2$$

두 직선이 일치하려면 기울기, y절편이 같다.

$\therefore \; a=-1$

$\Rightarrow \; 2\alpha+\beta=4-1=3$

17. 두 점 A$(-2,\ -1)$, B$(4,\ 3)$ 에 대하여 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

선분 AB 의 중점의 좌표는 $(1,\ 1)$

선분 AB 의 기울기는 $\dfrac{3-(-1)}{4-(-2)} = \dfrac{2}{3}$

따라서, 선분 AB 의 수직이등분선은 점 $(1,\ 1)$ 을 지나고, 기울기가 $-\dfrac{3}{2}$ 인 직선이므로

구하는 직선의 방정식은 $y - 1 = -\dfrac{3}{2}(x-1)$

즉, $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2}$

따라서, $a + b = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2} = 1$

18. 두 점 A(a, 3), B(4, 5) 를 잇는 선분 AB 의 수직이등분선의 방정식이 $y=-x+b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

i) 수직이등분선의 기울기는 선분 $\overline{AB}$ 의 기울기에 수직한다.

$$\Rightarrow \quad \frac{5-3}{4-a}\times -1=-1 \quad \therefore \ a=2$$

ii) $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 수직이등분선 위에 있다.

$$\Rightarrow \quad \frac{3+5}{2}=-\frac{4+2}{2}+b \quad \therefore \ b=7$$

$$\therefore \quad a+b=9$$

19. 이차함수 $y = kx^2 + k(k+1)x + 2k^2 - 2k + 1$ 은 k 의 값에 관계없이 항상 일정한 점을 지난다. 이 점의 좌표를 $\mathrm{P}(a,\ b)$ 라 할 때 $a+b$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

k에 관하여 정리하면

$(x+2)k^2 + (x^2+x-2)k + (1-y) = 0$

k에 관한 항등식이므로

$x+2=0,\ x^2+x-2=0,\ 1-y=0$

$\therefore x=-2,\ y=1$

$\therefore$ 구하는 점의 좌표는 $(-2,\ 1)$

$\therefore\ a=-2,\ b=+1$

$\therefore\ a+b=-1$

20. 세 꼭짓점이 $A(1,\ 3)$, $B(p,\ 3)$, $C(1,\ q)$인 $\triangle ABC$의 외심의 좌표가 $(2,\ 1)$일 때 pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = -3$

해설

$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-p)^2 + (1-3)^2$에서 $(p-2)^2 = 1$

$\therefore\ p = 1,\ 3$

그런데 $p = 1$일 때 점 A, B가 일치하므로 $p \neq 1$ $\therefore\ p = 3$

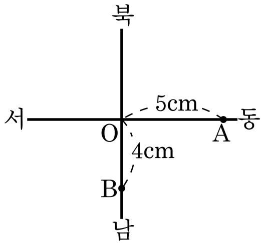
$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (1-q)^2$에서 $(q-1)^2 = 4$

$\therefore\ q = 3,\ -1$

그런데 $q = 3$일 때 점 A, C가 일치하므로 $q \neq 3$

$\therefore\ pq = 3 \times (-1) = -3$

21. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 5km, B는 남쪽으로 4km의 지점에 있다. A는 시속 4km로 서쪽으로, B는 시속 2km로 북쪽으로 향해서 동시에 출발했을 때, A와 B의 거리가 가장 짧을 때는 몇 시간 후인가?



① 1.4시간 후 ② 1.5시간 후 ③ 1.6시간 후

④ 1.7시간 후 ⑤ 1.8시간 후

해설

남북을 y 축, 동서를 x 축으로 하면 최초의 A, B의 위치의 좌표는 $A(5,\ 0)$, $B(0,\ -4)$ 이다. 이 때, t 시간 후의 A, B 의 자표는 $A(5-4t,\ 0)$, $B(0,\ -4+2t)$ 로 나타낼 수 있다. 따라서 t 시간 후의 A, B사이의 거리 s 는$s=\sqrt{\{0-(5-4t)\}^2+(-4+2t-0)^2}$

$$=\sqrt{20t^2-56t+41}=\sqrt{20\left(t-\frac{14}{10}\right)^2+\frac{9}{5}}$$

s 는 $t=\dfrac{14}{10}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

22. 직선 $3x+y=8$ 이 두 점 $A(4,\ -3)$, $B(1,\ 2)$ 를 잇는 선분 AB를 $1\ :\ m$ 으로 내분할 때, 상수 m 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

두 점 $A(4,\ -3)$, $B(1,\ 2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $1\ :\ m$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{4m+1}{m+1},\ \dfrac{-3m+2}{m+1}\right)$ 이다.

이 점이 직선 $3x+y=8$ 위에 있으므로

$$3\times\frac{4m+1}{m+1}+\frac{-3m+2}{m+1}=8$$

따라서 $m=3$

23. 세 꼭짓점이 $A(-1,\ -1)$, $B(4,\ 3)$, $C(0,\ 1)$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 를 $2:3$ 으로 내분하는 점을 각각 D, E, F 라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right),$$

즉 $(1,\ 1)$ 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 $(1,\ 1)$ 이다.

$\therefore\ a+b=1+1=2$

24. △ABC 의 세 변 AB, BC, CA 의 중점의 좌표가 각각 $(-2,\ 7)$, $(-6,\ 4)$, $(5,\ -2)$일 때, 이 삼각형의 무게중심의 좌표는 $(a,\ b)$ 이다. 이 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$A(a_1,\ b_1)$ $B(a_2,\ b_2)$ $C(a_3,\ b_3)$ 라고 하면 각 중점좌표는

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ \frac{b_1+b_2}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_2+a_3}{2},\ \frac{b_2+b_3}{2}\right),$$

$$\left(\frac{a_3+a_1}{2},\ \frac{b_3+b_1}{2}\right)$$ 이고

이들의 합을 3 으로 나누면,

$$\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}\right)$$ 로

△ABC 의 무게중심의 좌표와 같다.

따라서 무게중심의 좌표는

$$G=\left(\frac{-2-6+5}{3},\ \frac{7+4-2}{3}\right)=(-1,\ 3)$$

$\therefore\ 2$

25. 세 도시 A, B, C 가 삼각형의 꼭짓점을 이루며 위치해 있다. 송전소를 세우려고 하는 데 이 송전소에서 각 도시까지 송전하는데 드는 비용은 송전소에서 그 도시까지의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 한다. 이 때 송전 비용을 최소로 하는 송전소의 위치는?

① 외심 ② 내심 ③ 수심

④ 무게중심 ⑤ 방심

해설

$\mathrm{A}(x_1,\ y_1),\quad \mathrm{B}(x_2,\ y_2),\quad \mathrm{C}(x_3,\ y_3)$

송전소의 위치를 $\mathrm{D}(\ x,\ y)$, 비용을 P 라고 하면

$$\mathrm{P} = k\{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 + (x-x_3)^2+(y-y_3)^2\}$$

$$= k\left\{3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2 + 3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2\right\} - \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3} - \frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3} + k(x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$ 에서

$x = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y = \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때

즉 △ABC 의 무게중심에 위치할 때 비용이 최소이다.

26. 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$, $\mathrm{B}(a,\ b)$ 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4\cdots ㉠$$

$\overline{\mathrm{AB}}$ 를 2 : 1 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$$

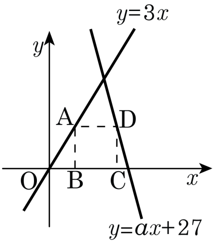
$\therefore\ a+2b-1=0\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$ 이다.

$\therefore\ 3a+b=5$

27. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y=3x$ 의 그래프가 점 A 를 지나고, 일차함수 $y=ax+27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.)



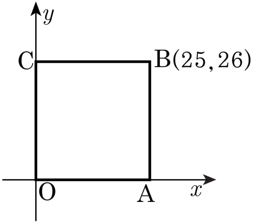
① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5

④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

$\overline{AB}=3$ 이므로 점 A 의 y 좌표는 3 이고,
점 A는 일차함수 $y=3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, $\overline{BC}=3$ 이므로 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다.
점 C 와 x 좌표가 같고, 점 A 와 y 좌표가 같은 점 D 의 좌표는 $(4,\ 3)$ 이다.
점 D가 일차함수 $y=ax+27$ 위의 점이므로 $x=4$, $y=3$를 대입하면 $3=a\times 4+27$
$\therefore\ a=-6$

28. 좌표평면 위에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다. 직선 $y=\frac{3}{8}x+1$은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부(경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$y=\frac{3}{8}x+1$에서 x가 8의 배수이면 y도 정수가 된다.

$0<x<25,\ 0<y<26$에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

$(8,\ 4),\ (16,\ 7),\ (24,\ 10)$으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

29. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$$3x + y + 2 = 0,\ \ x + 3y + k = 0,\ \ 2x - y + 3 = 0$$

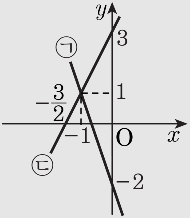
① $k \neq -2$ ② $k \neq -3$ ③ $k \neq -4$

④ $k \neq -7$ ⑤ $k \neq -11$

해설

$3x + y + 2 = 0 \cdots$ ㉠
$x + 3y + k = 0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x - y + 3 = 0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.



㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1 + 3 + k \neq 0$, $\therefore\ k \neq -2$

30. 두 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 와 $y=kx+2k+1$ 이 제 1 사분면에서 만날 때, k 의 값의 범위는?

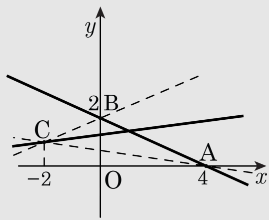
① $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{2}<k<\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{6}<k<2$

④ $-\frac{1}{6}<k<1$ ⑤ $-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

해설

$y=-\frac{1}{2}x+2\cdots$ ㉠

$y=kx+2k+1\cdots$ ㉡



㉡ 을 k 에 대하여 정리하면

$k(x+2)+(1-y)=0$ 이므로

k 의 값에 관계없이 정점 C$(-2,\ 1)$ 을 지난다.

㉠, ㉡이 제1 사분면에서 만날 조건은

그림에서 직선 AC, BC 사이를 직선 ㉡이 지나야 한다.

$\overline{AC}$ 의 기울기는 $-\frac{1}{6}$,

$\overline{BC}$ 의 기울기는 $\frac{1}{2}$

따라서 기울기 k는 $-\frac{1}{6}$ 보다 커야하고

$\frac{1}{2}$ 보다 작아야 제 1사분면에서 만난다.

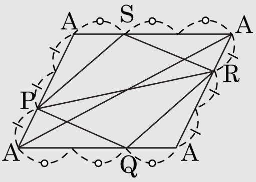
$\therefore\ -\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2}$

31. 평행사변형 ABCD에 대하여 네 변 AB, BC, CD, DA를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 P, Q, R, S라고 하자. $\mathrm{A}(-1,5)$, $\mathrm{B}(-4,-1)$이고 $\mathrm{R}(7,6)$일 때, 점 S의 좌표는?

① $(1,6)$　② $(1,7)$　③ $(2,6)$　④ $(2,7)$　⑤ $(3,6)$

해설

다음 그림에서 사각형 P, Q, R, S는 평행사변형이고
대각선 PR의 중점은 평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점과 일치한다.



$\mathrm{A}(-1,5)$, $\mathrm{B}(-4,-1)$이므로 점 P의 좌표는

$$\mathrm{P}\left(\frac{-8-1}{2+1}, \frac{-2+5}{2+1}\right)$$

$\therefore \mathrm{P}(-3,1)$

$\mathrm{R}(7,6)$이므로 대각선 PR의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1+6}{2}\right)$$

즉 $\left(2, \frac{7}{2}\right) \cdots$ ㉠

이 때, 점 $\mathrm{D}(a,b)$로 놓으면
대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{-1+b}{2}\right) \cdots \text{㉡}$$

㉠과 ㉡이 일치하므로 $\frac{-4+a}{2}=2$에서 $a=8$

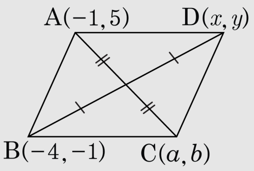
$\frac{-1+b}{2}=\frac{7}{2}$에서 $b=8$

따라서 점 $\mathrm{D}(8,8)$이므로
변 DA를 $2:1$로 내분하는 점 S의 좌표는

$$\mathrm{S}\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$$

즉 $\mathrm{S}(2,6)$

[별해] 다음과 같이 두 꼭짓점 C, D를 $\mathrm{C}(a,b)$, $\mathrm{D}(x,y)$로 놓으면
$\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점이 일치하므로



$\frac{-1+a}{2}=\frac{-4+x}{2}$, $\frac{5+b}{2}=\frac{-1+y}{2}$에서

$x-a=3 \cdots$ ㉠

$y-b=6 \cdots$ ㉡

$\mathrm{R}(7,\ 6)$이므로 $\frac{2x+a}{3}=7$에서 $a+2x=21 \cdots$ ㉢

$\frac{2y+b}{3}=6$에서 $b+2y=18 \cdots$ ㉣

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $a=5, x=8$

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $b=2, y=8$

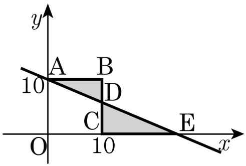
$\therefore \mathrm{D}(8,8)$

그러므로 변 DA를 $2:1$로 내분하는 점 S의 좌표는

$$\mathrm{S}\left(\frac{-2+8}{2+1}, \frac{10+8}{2+1}\right)$$

즉 $\mathrm{S}(2,6)$

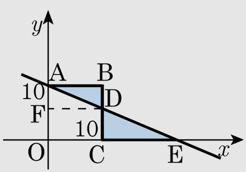
32. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC가 있다. 변 BC 위에 점 B, C가 아닌 한 점 D를 지나는 직선 AD를 그을 때, 색칠한 부분의 넓이가 사다리꼴 OADC의 넓이와 같아졌다면 직선 AD의 기울기는?



① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

y축 위에 $\overline{OC} // \overline{FD}$가 되게 F를 잡으면, 다음 그림에서



$\triangle$ ABD $=$ $\triangle$ AFD이므로

$\square$ OCDF $=$ $\triangle$ DCE

$$\overline{OC} \times \overline{CD} = \frac{1}{2}\ \overline{CE} \times \overline{CD}$$

$\therefore\ \overline{CE} = 2\overline{OC} = 2 \times 10 = 20$

$\therefore\ \overline{OE} = 30$

따라서 직선 AD의 기울기는 $\frac{0-10}{30-0} = -\frac{1}{3}$