1. 다항식 $f(x)$를 $(x+3)(x-6)$으로 나누었을 때의 나머지가 $x-2$이었다. $f(x)$를 $(x+3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하면?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

$f(x)=(x+3)(x-6)Q(x)+x-2$이므로

$f(-3)=-5$

2. 복소수 $z=(2+i)a^2+(1+4i)a+2(2i-3)$이 순허수일 때, 실수 a의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z=(2a^2+a-6)+(a^2+4a+4)i$

순허수이므로 $2a^2+a-6=0$

$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3)=0$

$\Leftrightarrow \quad a=-2$ 또는 $a=\dfrac{3}{2}$

그런데 $a=2$이면,

$a^2+4a+4=0$이 되어 순허수가 성립되지 않는다.

$\therefore \quad a=\dfrac{3}{2}$

3. $2x^2+4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}\times(-2)=1$

4. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

5. $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

주어진 식을 완전제곱으로 고치면
$f(x) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = (x-1)^2 + 1$
따라서 함수 $f(x)$ 는 점$(1, 1)$ 을 꼭지점으로 하는
아래로 볼록한 포물선이다.
그러므로 $-1 \le x \le 4$ 의 범위에서
최솟값은 $x = 1$ 일 때 1 이고,
최댓값은 $x = 4$ 일 때, 10 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $10 + 1 = 11$

6. 두 부등식 $10-3x>4$, $2x+1>-3$을 동시에 만족하는 해가 $a<x<b$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$i)10-3x>4$
$\Rightarrow x<2$
$ii)\ 2x+1>-3$
$\Rightarrow x>-2$
부등식의 해의 범위가 $-2<x<2$ 이므로,
$a+b=(-2)+2=0$ 이다.

7. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$ 일 때, $(x+y)(y+z)(z+x)$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+y+z=1$에서

$x+y=1-z$

$y+z=1-x$

$z+x=1-y$

$(x+y)(y+z)(z+x)=(1-z)(1-x)(1-y)$

$=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)-xyz$

$=1-1+2-3=-1$

8. 다항식 $f(x)$를 $x-3, x-4$로 나눈 나머지가 각각 $3, 2$이고, 다항식 $f(x+1)$을 x^2-5x+6으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(3)=3,\ f(4)=2$

$R(x)=ax+b$라 하면

$f(x+1)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$

$x=2$대입,

$f(3)=2a+b=3$

$x=3$대입,

$f(4)=3a+b=2$

$a=-1,\ b=5$

$R(x)=-x+5,$

$R(1)=-1+5=4$

9. x 에 대한 두 이차방정식
$x^2 - 2\sqrt{b}x + (2a+1) = 0 \cdots$ ㉠
$x^2 - 2ax - b = 0 \cdots$ ㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

① 서로 다른 두 실근을 가진다.

② 중근을 가진다.

③ 서로 다른 두 허근을 가진다.

④ 판별할 수 없다.

⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = b - (2a+1) > 0 \therefore\ b > 2a+1$$

㉡의 판별식을 D' 이라 하면

$$\frac{D'}{4} = a^2 + b > a^2 + 2a + 1$$

$$= (a+1)^2 \geq 0$$

$$\therefore\ \frac{D'}{4} > 0$$

따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

10. 이차방정식 $(\sqrt{2}+1)x^2 + x - \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 0$의 두 근의 곱은?

① $-\sqrt{2}$　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ $\sqrt{2}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{2}-1$을 곱하면

$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)x^2 + (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 0$

$x^2 + (\sqrt{2}-1)x - \sqrt{2} = 0$

$(x+\sqrt{2})(x-1)$

$\therefore x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = 1$

따라서 두 근의 곱은 $-\sqrt{2}$

11. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+6=0$의 두 근 a, b에 대하여 $|a-b|=1$이 성립할 때, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$의 값은? (단, $m<0$)

① $-1-\sqrt{2}$　② $2+\sqrt{3}$　③ $2-\sqrt{3}$

④ $1+\sqrt{2}$　⑤ $-2+\sqrt{5}$

해설

$x^2+mx+6=0$의 두 근이 $a,\ b$

$a+b=-m,\ ab=6$

$|a-b|=1$

$|a-b|^2=(a+b)^2-4ab$

$=m^2-24=1$

$m^2=25\ \therefore\ m=-5(\because\ m<0)$

$x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

$a=3,\ b=2$

$\therefore\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

12. 다음 중 사차방정식 $x^4+x^2+1=0$의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

④ $1+\sqrt{3}i$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

해설

$x^4+x^2+1=0$을 변형하면

$x^4+2x^2+1-x^2=0$,

$(x^2+1)^2-x^2=0$

$(x^2+1+x)(x^2+1-x)=0$,

$x^2+x+1=0$ 또는 $x^2-x+1=0$

$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

13. 어느 인터넷 유료 정보사이트는 한 달 기본 가입비가 19,000 원이고 정보 건당 이용료가 50 원이다. 한 달 사용 요금이 25,000 원 이상 30,000 원 이하가 되게 하려고 할 때, 옳지 <u>않은</u> 정보 이용 건수는?

① 120 건 ② 160 건 ③ 200 건

④ 220 건 ⑤ 240 건

해설

한 달 동안 x 건의 정보를 이용할 때, 사용하는 요금을 식으로 나타내면 $19000+50x$ 이다. 한 달 요금이 25,000 원 이상 30,000 원 이하가 되기 위해서는 $25000 \le 19000+50x \le 30000$ 이다.

이를 연립방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 19000+50x \ge 25000 \\ 19000+50x \le 30000 \end{cases}$ 이고,

정리하면 $\begin{cases} x \ge 120 \\ x \le 220 \end{cases}$ 이다.

따라서 $120 \le x \le 220$ 이다.

그러므로, 120 건 이상 220 건 이하로 사용하여야 한다.

14. 부등식 $x^2 - 4|x| - 5 < 0$을 풀면?

① $-5 < x < 5$　② $-5 < x < 0$　③ $-5 < x < 1$

④ $-1 < x < 5$　⑤ $-1 < x < 6$

해설

(i) $x \geq 0$일 때, $|x| = x$이므로

$x^2 - 4x - 5 < 0$, $(x-5)(x+1) < 0$

$-1 < x < 5$

이 때 $x \geq 0$과의 공통범위는 $0 \leq x < 5$

(ii) $x < 0$일 때

$x^2 + 4x - 5 < 0$, $(x+5)(x-1) < 0$

$-5 < x < 1$

이 때 $x < 0$과 공통 범위는 $-5 < x < 0$

(i), (ii)에서 $-5 < x < 5$

15. 두 다항식 $A = x^3 + x^2 + ax - 2, B = x^3 - x^2 - ax + 4$의 최대공약수가 일차식일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

해설

최대공약수를 $x - \alpha$라 하자.
나머지정리에 의해 $\alpha^3 + \alpha^2 + a\alpha - 2 = 0$
$\alpha^3 - \alpha^2 - a\alpha + 4 = 0$
두 식을 더하면 $2\alpha^3 = -2, \quad \alpha = -1$
이제 $\alpha = -1$ 을 다시 A식에 대입하면
$-1 + (-1)^2 - a - 2 = 0 \quad \therefore a = -2$

16. 다음은 유클리드 호제법 '두 다항식 A, B 에 대하여 A 를 B 로 나눈 나머지를 R 라 하면 A 와 B 의 최대공약수는 B 와 R 의 최대공약수와 같다.' 를 보이는 과정이다.

> A, B 의 최대공약수를 G 라 하면,
> $A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소) 로 나타낼 수 있다.
> A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
> $A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
> $\therefore\ R = G(a - bQ)$
> 즉, G 는 B 와 R 의 (가) 이다.
> 한편, b 와 $a - bQ$ 가 (나) 가 아니라면
> (가) m (일차이상의 다항식) 이 존재하여
> $b = mk$, $a - bQ = mk'$ 이 성립한다.
> $a = mk' + bQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
> 즉, a 와 b 의 (가) m 이 존재하므로
> a 와 b 가 서로소라는 가정에 모순이다.
> 따라서 b 와 $a - bQ$ 는 (나) 이다.
> $B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서
> b 와 $a - bQ$ 가 (나) 이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수 G 와 같다.

(　) 안의 (가), (나) 에 알맞은 것은?

① 공약수, 공약수　　② 공약수, 서로소
③ 공약수, 공배수　　④ 공배수, 서로소
⑤ 공배수, 공약수

해설

A, B 의 최대공약수를 G 라 하면
$A = Ga$, $B = Gb$ (단, a, b 는 서로소) 이고,
A 를 B 로 나눈 몫을 Q 라 하면
$A = BQ + R$ 에서 $Ga = GbQ + R$
$\therefore\ R = (a - bQ)G$
즉, G 는 B 와 R 의 공약수이다.
한편, b 와 $a - bQ$ 가 서로소가 아니라면
공약수인 m 이 존재하여
$b = mk$, $a - bQ = mk'$
$a = mk' - kQ = mk' + mkQ = m(k' + kQ)$
즉, a 와 b 의 공약수 m 이 존재하므로 a 와 b 가 서로소라는 것에 모순된다.
따라서 b 와 $a - bQ$ 는 서로소이다.
$B = Gb$, $R = G(a - bQ)$ 에서 a 와 $a - bQ$ 가 서로소이므로 B 와 R 의 최대공약수는 A 와 B 의 최대공약수와 같다.

17. 복소수 z 에 대하여 $f(z) = z\bar{z}$ ($\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)라 할 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (w 는 복소수)

보기

ㄱ $f(z) \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = f(z)f(w)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

해설

ㄱ $z = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$f(z) = z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geqq 0$

ㄴ $f(z+w) = (z+w) \cdot (\overline{z+w}) = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w})$

$= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w}$

$\neq z\bar{z} + w\bar{w} = f(z) + f(w)$

ㄷ $f(zw) = zw \cdot (\overline{zw}) = zw \cdot \bar{z}\ \bar{w}$

$= z\bar{z} \cdot w\bar{w} = f(z)f(w)$

18. 임의의 실수 x, y에 대하여 $x^2+y^2+2xy+2x+ay+b>0$이 성립할 a, b의 조건은? (단, a, b는 실수)

① $a=1,\quad b>2$
② $a=1,\quad b<2$
③ $a=2,\quad b>1$
④ $a=2,\quad b\geq 1$
⑤ $a=2,\quad b\leq 1$

해설

준식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+2(1+y)x+y^2+ay+b>0$ 이고
임의의 실수 x에 대하여 항상 성립하기 위해서는
$D/4<0$를 만족해야 한다.
$D/4=(1+y)^2-(y^2+ay+b)<0$
$\therefore (2-a)y+1-b<0 \cdots$ ①
①식이 모든 실수 y에 성립할 조건은
$(2-a)=0,\quad 1-b<0,$
$\therefore a=2,\quad b>1$

19. 직각을 낀 두 변의 길이의 합이 16 인 직각삼각형의 넓이의 최댓값은?

① 18 ② 32 ③ 48 ④ 64 ⑤ 80

해설

직각을 낀 두변의 길이를 각각 x, y 라 하면 $x+y=16$
이 때, $x>0$, $y>0$ 이므로 $y=16-x>0$ 에서 $0<x<16$
직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}x(16-x)=-\frac{1}{2}x^2+8x=-\frac{1}{2}(x-8)^2+32$$

따라서 $0<x<16$ 이므로 $x=8$ 일 때 넓이의 최댓값은 32 이다.

20. 어떤 문자도 0 은 아니고, $xy=a,\ xz=b,\ yz=c$ 라고 할 때, $x^2+y^2+z^2$ 은?

① $\dfrac{ab+ac+bc}{abc}$　② $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

③ $\dfrac{(a+b+c)^2}{abc}$　④ $\dfrac{(ab+ac+bc)^2}{abc}$

⑤ $\dfrac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}$

해설

$$abc = x^2y^2z^2 = x^2c^2,\ x^2 = \frac{ab}{c}$$

마찬가지로, $y^2 = \dfrac{ac}{b}$, $z^2 = \dfrac{bc}{a}$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x^2+y^2+z^2 &= \frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\\ &= \frac{(ab)^2+(ac)^2+(bc)^2}{abc}\end{aligned}$$