

1. 수직선 위의 두 점 $A(a), B(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{AB}$ 는 5이고 점 $C(a + b)$ 의 좌표를 -1 이라 할 때, 점 $D(a - b)$ 의 좌표는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$a > b$ 일때, $A(a), B(b)$ 사이의 거리는 $a - b$ 이므로, $a - b = 5$
따라서 $D(a - b)$ 의 좌표는 5

2. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?
- ① 6 km ② 9 km ③ 12 km
- ④ 15 km ⑤ 18 km

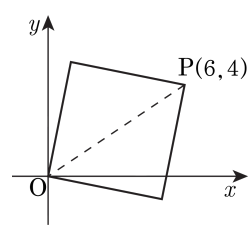
해설

그림과 같이 A 마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X 라 하면

A(0), B(6), C(9), X(x)
A마을과 X마을 사이의 거리는
C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로
 $|x - 0| = 2|x - 9|$
곧, $|x| = 2|x - 9|$
 $\therefore 2(x - 9) = \pm x$
 $\therefore x = 6$ 또는 $x = 18$
여기서 $x = 6$ 이면 $X = B$ 가 되므로 성립하지 않는다.
따라서 $x = 18$
이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12(\text{km})$

3. 다음 그림과 같은 정사각형의 넓이는?

- ① 16 ② 20 ③ 26
④ 32 ⑤ 52



해설

$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$ 이므로
주어진 정사각형의 한 변의 길이를 a 라고 하면
 $\sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{52}$ 에서 $a^2 = 26$ 이다.
따라서 정사각형의 넓이는 26이다

4. 두 점 $A(-1, 4)$, $B(6, 3)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 $P(a, b)$ 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$P = (a, 0)$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 1)^2 + 4^2 = (a - 6)^2 + 9$, $a = 2$
 $\therefore P = (2, 0)$
 $a + b = 2$

5. 두 점 A(-1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P와 y 축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

- ① P(2.4, -1), Q(0, 6) ② P(3.6, 0), Q(-1, 6)
③ P(3.6, 0), Q(0, 6) ④ P(2.4, 0), Q(0, 5)
⑤ P(3.6, 0), Q(-1, 2)

해설

A(-1, 2), B(4, 5)에서 같은 거리에 있는 P(x , 0) 과 Q(0, y)
를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore x = 3.6 \therefore P(3.6, 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore y = 6 \therefore Q(0, 6)$

6. $\triangle ABC$ 에서 A(6, 1), B(-1, 2), C(2, 3)이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

외심을 P(a , b)라 하면

$$(1) \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a+1)^2 + (b-2)^2 \dots\dots\textcircled{1}$$

$$\overline{PA}^2 = \overline{PC}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2 + (b-1)^2 = (a-2)^2 + (b-3)^2 \dots\dots\textcircled{2}$$

①, ②를 각각 전개하여 정리하면

$$7a - b - 16 = 0, \quad 2a - b - 6 = 0$$

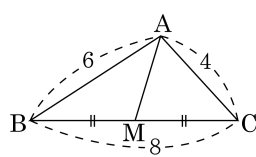
연립하여 풀면 $a = 2, b = -2$

따라서 외심은 (2, -2)이다.

$$(2) \overline{PA}^2 = (2-6)^2 + (-2-1)^2 = 25$$

$$\therefore \overline{PA} = 5$$

7. 다음 그림의 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$$

$$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$$

$$\therefore \overline{AM}^2 = 10$$

8. 두 점 $A(1, 2)$, $B(-3, 0)$ 으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취의 방정식은?
- ① $y = 2x + 1$ ② $y = 2x - 1$ ③ $y = -2x + 1$
④ $y = -2x - 1$ ⑤ $y = -x + 2$

해설

구하는 점을 $P(x, y)$ 라 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로
 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$
양변을 제곱해서 정리하면
 $-8x - 4y - 4 = 0, -4y = 8x + 4$
 $\therefore y = -2x - 1$

해설

두 점 으로부터 같은 거리에 있는 점의 자취는 선분의 수직이등분이다.
 $\overline{AB}$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로
 $\overline{AB}$ 의 수직이등분선은 기울기는 -2 이고
 $\overline{AB}$ 의 중점 $(-1, 1)$ 을 지난다.
 $\therefore y - 1 = -2(x + 1)$
 $\therefore y = -2x - 1$

9. 두 점 A(-2, 0), B(1, -1)에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 될 때의 점 P의 좌표를 구하면?

- ㉠ P $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ㉡ P (-1, -1) ㉢ P (0, 0)
㉣ P $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ㉤ P (1, 1)

해설

점 P의 좌표를 (x, y)라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (x+2)^2 + y^2 + (x-1)^2 + (y+1)^2 \\ &= 2x^2 + 2x + 2y^2 + 2y + 6 \\ &= 2(x^2 + x) + 2(y^2 + y) + 6 \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 5\end{aligned}$$

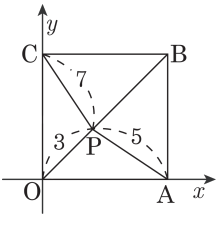
따라서 $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값이 최소가 된다.

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

10. 다음 그림과 같이 정사각형 OABC의 내부의 점 P에 대하여 $OP = 3$, $AP = 5$, $CP = 7$ 일 때 선분 PB의 길이는?

- ① $2\sqrt{15}$ ② $\sqrt{65}$ ③ $\sqrt{70}$
 ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$



해설

정사각형의 한 변의 길이를 a , 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \dots \textcircled{A} \\ (a-x)^2 + y^2 = 25 & \dots \textcircled{B} \\ x^2 + (a-y)^2 = 49 & \dots \textcircled{C} \end{cases}$$

선분 PB의 길이는

$$PB = \sqrt{(a-x)^2 + (a-y)^2} \text{ 이다.}$$

$\textcircled{B} + \textcircled{C} - \textcircled{A}$ 에서

$$(a-x)^2 + (a-y)^2 = 25 + 49 - 9 = 65$$

$$\text{따라서 } PB = \sqrt{65}$$

11. 직선 $y = x + 2$ 위의 점 P는 두 점 A(-2, 0), B(4, -2)로부터 같은 거리에 있다고 할 때, 점 P의 좌표는?

① (-1, 1)

② (0, 2)

③ (1, 3)

④ (2, 4)

⑤ (3, 5)

해설

P가 $y = x + 2$ 위에 있으므로 P(a, a + 2) 라고 놓을 수 있다.

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$$\sqrt{(a+2)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{(a-4)^2 + (a+4)^2}$$

$$2(a+2)^2 = (a-4)^2 + (a+4)^2$$

$$8a = 24$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore P(3, 5)$$

12. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0) 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$$\overline{AB}^2 = (0 - 2)^2 + (a - 3)^2 = a^2 - 6a + 13$$

$$\overline{BC}^2 = (2 - 1)^2 + (3 - 0)^2 = 10$$

$$\overline{AC}^2 = (0 - 1)^2 + (a - 0)^2 = a^2 + 1$$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 - 6a + 13 = 10 \text{ 즉 } a^2 - 6a + 3 = 0$$

$$\therefore a = 3 \pm \sqrt{6}$$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 + 1 = 10 \text{ 즉 } a^2 = 9$$

$$\therefore a = \pm 3$$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 에서

$$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13 \text{ 즉 } 6a = 12$$

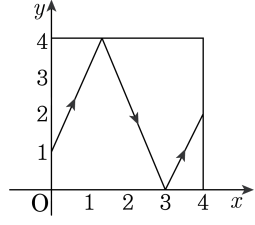
$$\therefore a = 2$$

$a = -3$ 이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a

의 값의 합은

$$(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$$

13. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ 와 $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)



- ① $(1, 4)$ ② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$
 ④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$ 과 $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과 $y = 4$

와의 교점을 계산하면 된다.
$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

14. 두 점 A(-2, 1), B(4, -3)에서 같은 거리에 있고 직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점 의 좌표는?

- ① (-3, -7)
- ② (-2, -5)
- ③ (3, 5)
- ④ (2, 3)
- ⑤ (3, 2)

해설

직선 $y = 2x - 1$ 위에 있는 점을 $P(a, b)$ 라 하면 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 에서
 $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b + 3)^2$
 $12a - 8b = 20$
 $\therefore 3a - 2b = 5 \cdots \cdots \textcircled{1}$
또, 점 P는 $y = 2x - 1$ 위에 있으므로
 $b = 2a - 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$
①, ②를 연립하여 풀면 $a = -3, b = -7$

해설

두 점으로부터 같은 거리에 있으므로 구하는 점은
A(-2, 1), B(4, -3)의 수직이등분선 위에 있다.
 $\overline{AB}$ 의 기울기는 $\frac{1+3}{-2-4} = -\frac{2}{3}$ 이므로
수직이등분선의 기울기는 $\frac{3}{2}$, A(-2, 1), B(4, -3)의 중점 (1, -1)
를 지나므로
 $\therefore y + 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \cdots \textcircled{1}$
구하는 점 P는 $y = 2x - 1$ 과 ①의 교점이다.
연립하여 풀면 $x = -3, y = -7$
 $\therefore P(-3, -7)$

15. 수직선 위의 세 점 A(1), B(6), C(8) 과 동점 P(x) 가 있다. $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 이 최소가 될 때, 점 P에서 점 A까지의 거리를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} & \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 \\ &= (x-1)^2 + (x-6)^2 + (x-8)^2 \\ &= 3(x-5)^2 + 26 \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때 최소가 된다.
점 P(5) 에서 점 A(1) 까지 거리는 $|5-1|=4$ 이다.

16. 네 점 $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 3)$, $C(0, 3)$ 과 임의의 점 P 에 대하여 $\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 의 최솟값은?

- ① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 10 ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $10\sqrt{2}$

해설

$\square OABC$ 를 그려보면 직사각형이 된다.
이 때, $\overline{PO} + \overline{PB}$ 의 값은 점 P 가 $\overline{OB}$ 위에 있을 때 최소이므로
 $\overline{PO} + \overline{PB} \geq \overline{OB} \dots\dots \textcircled{1}$
또, $\overline{PA} + \overline{PC}$ 의 값은 점 P 가 $\overline{AC}$ 위에 있을 때 최소이므로
 $\overline{PA} + \overline{PC} \geq \overline{AC} \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에 의해 $\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 의 값은 점 P 가 $\overline{OB}$ 와 $\overline{AC}$ 의 교점일 때 최소이므로
 $\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq \overline{OB} + \overline{AC}$
이 때, $\square OABC$ 의 대각선 OB , AC 의 길이는 $\overline{OB} = \overline{AC} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
따라서 $\overline{PO} + \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ 의 최솟값은 10이다.

해설

네 점으로부터의 거리의 합이 최소값은 네 점으로 이루어진 사각형의 두 대각선의 길이의 합과 같다

17. 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB 를 1 : 2 로 내분하는 점이 P(2, 3) ,
1 : 2 로 외분하는 점이 Q(-2, 7) 일 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{2}$

해설

A(x_1 , y_1), B(x_2 , y_2) 라고 하면

P 는 내분점이고 Q 는 외분점이므로

$$\frac{x_2 + 2x_1}{1 + 2} = 2, \quad \frac{y_2 + 2y_1}{1 + 2} = 3,$$

$$\frac{-2x_1 + x_2}{1 - 2} = -2, \quad \frac{-2y_1 + y_2}{1 - 2} = 7$$

위 식을 정리하면,

$$2x_1 + x_2 = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2y_1 + y_2 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$-2x_1 + x_2 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$-2y_1 + y_2 = -7 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①과 ③으로부터 $2x_2 = 8$

따라서 $x_2 = 4$ ①에 대입하면 $x_1 = 1$

②와 ④로부터 $2y_2 = 2$

따라서 $y_2 = 1$ ②에 대입하면 $y_1 = 4$

따라서 $\overline{AB} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (4 - 1)^2} = 3\sqrt{2}$ 이다.

18. 네 점 A(a, 2), B(3, 1), C(2, -3), D(b, -2)를 꼭짓점으로 하는 □ABCD가 마름모가 되게 하는 실수 a, b에 대하여 a + b의 값은?
(단, a > 0)

- ① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

마름모는 평행사변형이므로
 $\overline{AC}$ 의 중점과 $\overline{BD}$ 의 중점이 일치한다.
즉, $\left(\frac{a+2}{2}, \frac{2+(-3)}{2}\right) = \left(\frac{3+b}{2}, \frac{1+(-2)}{2}\right)$ 에서 $\frac{a+2}{2} = \frac{b+3}{2}$
 $\therefore a - b = 1 \dots \textcircled{1}$
이 때, 평행사변형이 마름모가 되려면 이웃하는 두 변의 길이가
같아야 한다. 즉, $\overline{AB} = \overline{BC}$ 이어야 하므로
 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
 $(3-a)^2 + (1-2)^2 = (2-3)^2 + (-3-1)^2$
 $a^2 - 6a + 10 = 17, a^2 - 6a - 7 = 0$
 $(a-7)(a+1) = 0$
 $\therefore a = 7 (\because a > 0)$
이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = 6$
 $\therefore a + b = 13$

19. 두 함수 $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = mx + n$ 의 그래프가 만나는 서로 다른 두 교점과 점 P(2, 5)를 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표가 (4, 1) 일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 교점을 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하면
 $x^2 - 6x = mx + n$, $x^2 - (m+6)x - n = 0$ 의 두 근이 x_1, x_2 이므로
근과 계수와의 관계에 의해 $x_1 + x_2 = m + 6$ 이다.
두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 와 P(2, 5)의 무게중심이 (4, 1)이므로
 $\frac{x_1 + x_2 + 2}{3} = 4$ 에서 $x_1 + x_2 = 10$ 이므로
 $m + 6 = 10 \quad \therefore m = 4$

20. 좌표평면 위의 세 점 A(3, 4), B(0, 0), C(8, -8)에 대하여 $\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점의 좌표는?

- ① $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$
- ② $\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$
- ③ $\left(\frac{15}{11}, -\frac{15}{11}\right)$
- ④ $\left(\frac{25}{13}, -\frac{25}{13}\right)$
- ⑤ $\left(\frac{28}{17}, -\frac{28}{17}\right)$

해설

$\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
 $\overline{AC} = \sqrt{(8-3)^2 + (-8-4)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$
 $\angle BAC$ 의 이등분선이 선분 BC와 만나는 교점을 D(x,y)라 하면 각의 이등분선의 성질에 의하여
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 5 : 13$
따라서, 점 D(x,y)는 선분 BC를 5 : 13으로 내분하는 점이므로
$$x = \frac{5 \cdot 8 + 13 \cdot 0}{5 + 13} = \frac{20}{9},$$
$$y = \frac{5 \cdot (-8) + 13 \cdot 0}{5 + 13} = -\frac{40}{18} = -\frac{20}{9}$$
$$\therefore D\left(\frac{20}{9}, -\frac{20}{9}\right)$$