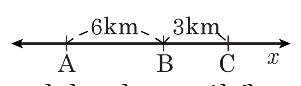
1. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?

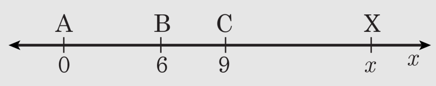


① 6 km ② 9 km ③ 12 km

④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)

A마을과 X마을 사이의 거리는

C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로

$|x-0| = 2|x-9|$

곧, $|x| = 2|x-9|$

$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$

$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$

여기서 $x = 6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.

따라서 $x = 18$

이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12$(km)

2. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ a)$, $\mathrm{C}(4,\ 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$일 때, a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(3-2)^2 + (a-0)^2 = (4-3)^2 + (2-a)^2$

$1 + a^2 = 1 + 4 - 4a + a^2$

$4a = 4 \qquad \therefore a = 1$

3. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2b+a)$, $\mathrm{B}(-a,\ a)$ 사이의 거리가 $2\sqrt{5}$일 때, a^2+b^2의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}} &= \sqrt{(-a-a)^2+\{a-(2b+a)\}^2}\\ &= \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}\end{aligned}$$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

4. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 3),\ \mathrm{Q}(1,\ a)$ 에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(1-a)^2 + (a-3)^2} = \sqrt{2a^2 - 8a + 10}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{2}$ 이므로 $\sqrt{2a^2 - 8a + 10} = \sqrt{2}$

양변을 제곱하면 $2a^2 - 8a + 10 = 2$

$2a^2 - 8a + 8 = 0,\ a^2 - 4a + 4 = 0\ ,\ (a-2)^2 = 0$

$\therefore\ a = 2$

5. 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점Q의 좌표를 구하면?

① $P(2.4, -1)$, $Q(0,\ 6)$　　② $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 6)$

③ $P(3.6,\ 0)$, $Q(0,\ 6)$　　④ $P(2.4, 0)$, $Q(0,\ 5)$

⑤ $P(3.6, 0)$, $Q(-1,\ 2)$

해설

$A(-1,\ 2)$, $B(4,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 $P(x,\ 0)$과 $Q(0,\ y)$를 구해야 하므로 $\overline{AP} = \overline{BP}$에서 $\sqrt{(x+1)^2+2^2} = \sqrt{(x-4)^2+5^2}$

양변을 정리하면 $10x = 36 \therefore\ x = 3.6 \quad \therefore\ P(3.6,\ 0)$

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서 $\sqrt{1^2+(y-2)^2} = \sqrt{4^2+(y-5)^2}$

양변을 정리하면 $6y = 36 \therefore\ y = 6\ \therefore\ Q(0,\ 6)$

6. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$ 인 $\triangle\mathrm{ABC}$가 $\angle\mathrm{A}$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{A}$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $\mathrm{A}(a, 3)$, $\mathrm{B}(-1, -5)$, $\mathrm{C}(3, 7)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$

$\overline{\mathrm{CA}}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

7. 좌표평면 위의 두 점 $A(3,2)$, $B(5,4)$ 와 x 축 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은?

① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$ ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $\sqrt{40}$

해설

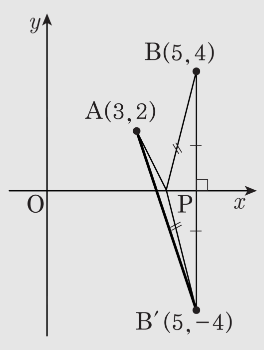
다음 그림과 같이 점 $B(5,\ 4)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 $B'(5,-4)$ 라 하면

$\overline{PB}=\overline{PB'}$ 이므로

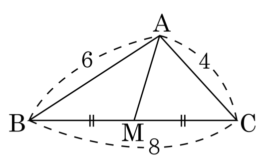
$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA}+\overline{PB'}\geq\overline{AB'}$

따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 의 최솟값은 $\overline{AB'}$ 이고

$\overline{AB'}=\sqrt{(5-3)^2+(-4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$



8. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=8$, $\overline{AC}=4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2+4^2=2(\overline{AM}^2+4^2)$

$36+16=2\overline{AM}^2+32$

$\therefore \overline{AM}^2=10$

9. 다음은 11 세기 경 아라비아의 수학책에 나오는 내용을 변형한 것이다. 강을 사이에 두고 두 그루의 나무가 서 있었는데 두 나무의 높이는 각각 20m , 30m 이고 두 나무 사이의 거리는 50m 이다. 각각의 나무 꼭대기에 새가 앉아서 수면에 있는 한 마리의 물고기를 노리고 있었다. 이 두 마리의 새가 동시에 날아서 일직선 위로 그 물고기에게 덤벼들어 똑같이 그 물고기가 있는 수면에 당도하였다. 두 마리의 새의 속도가 같다고 하였을 때, 높이가 20m 인 나무 밑에서 물고기까지의 거리는 몇 m 인지 구하여라.

▶ 답 : ____ m

▷ 정답 : 30 m

해설

20m, 30m 나무 위의 두 마리의 새의 위치를 각각 A, B 라 하고, 높이가 20m 인 나무 밑으로부터 물고기가 있는 P 까지의 거리를 a 라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $a^2 + 20^2 = (50 - a)^2 + 30^2$

$\therefore\ a = 30(\mathrm{m})$

10. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 6)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$, $\mathrm{C}(4,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 와 임의의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소일 때, $a+b$의 값은?

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$

$=\left\{(a-1)^2+(b-6)^2\right\}+\left\{(a+2)^2+(b-2)^2\right\}$

$\quad+\left\{(a-4)^2+(b-1)^2\right\}$

$=3a^2-6a+3b^2-18b+62$

$=3\left(a^2-2a+1\right)+3\left(b^2-6b+9\right)+32$

$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+32$

이때, $a,\ b$는 실수이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은

$a=1,\ b=3$일 때 최소이다.

$\therefore a+b=4$

11. $\triangle$ABC의 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = 6$, $\overline{BC} = 10$ 이면 $\overline{AM}$ 의 길이는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로
$\triangle$ABC 는 직각삼각형이다.
그리고 빗변인 $\overline{BC}$ 의 중점인 M은 직각삼각형의 외심이다.
$\therefore \ \overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM} = 5$

12. $\triangle$ABC 에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점을 M 이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$

$\therefore\ x = \pm 6$

$x > 0$ 이므로 $x = 6$

13. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-2,\ 2)$가 있다. 이 0때, $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$의 최솟값은?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 3

해설

원점을 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a+2)^2+(b-2)^2}$

$=\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$이므로

이 값이 최소가 되는 것은 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{AB}}$의 최소값은

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2}$

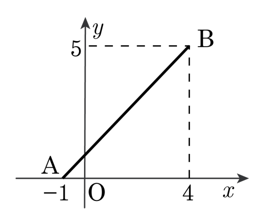
14. 세 변의 중점의 좌표가 $(-2,3)$, $(3,-1)$, $(5,4)$ 인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는?

① $(-1,8),(-4,-2),(10,2)$ ② $(0,8),(4,2),(10,0)$
③ $(-1,8),(4,2),(10,0)$ ④ $(-1,-8),(4,-2),(10,-2)$
⑤ $(0,8),(-4,-2),(10,0)$

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각
(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) 로 놓으면,
$\frac{x_1+x_2}{2}=-2$, $\frac{x_2+x_3}{2}=3$, $\frac{x_3+x_1}{2}=5$
$\therefore\ x_1+x_2=-4,\quad x_2+x_3=6,\quad x_3+x_1=10$
$\therefore\ x_1=0,\quad x_2=-4,\quad x_3=10$
$\frac{y_1+y_2}{2}=3$, $\frac{y_2+y_3}{2}=-1$, $\frac{y_3+y_1}{2}=4$
$\therefore\ y_1+y_2=6,\quad y_2+y_3=-2,\quad y_3+y_1=8$
$\therefore\ y_1=8,\quad y_2=-2,\quad y_3=0$
따라서 세 꼭짓점의 좌표는
$(0,8),(-4,-2),(10,0)$ 이다.

15. 두 점 A(−1, 0), B(4, 5)에 대하여 두 점 A, B로부터의 거리의 비가 3 : 2 점 P의 자취의 방정식은?



① $(x-5)^2+(y-6)^2=50$　② $(x-6)^2+(y-7)^2=60$

③ $(x-7)^2+(y-6)^2=70$　④ $(x-7)^2+(y-8)^2=80$

⑤ $(x-8)^2+(y-9)^2=72$

해설

점 P를 (x, y)라 두면

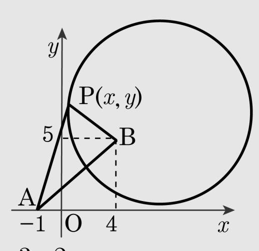
$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{BP}} = 3 : 2$이므로

$\sqrt{(x+1)^2+y^2} : \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}=3:2$

정리하면 $(x-8)^2+(y-9)^2=72$



16. 점 $A(-2,\ 6)$와 점 $B(4, 4)$, 그리고 평면 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{AP}$의 중점이 B, $\overline{AQ}$의 중점이 P일 때, 점 Q는 $\overline{AB}$를 몇 대 몇으로 외분하는 점인가?

① 4 : 3　　② 3 : 4　　③ 2 : 3　　④ 3 : 2　　⑤ 1 : 3

해설

$P(x, y)$ 라 하면 $\dfrac{-2+x}{2}=4,\ \dfrac{6+y}{2}=4$ 에서

$x=10,\ y=2,\ \therefore\ P(10,\ 2)$

$Q(\alpha,\ \beta)$ 라 하면 $\dfrac{-2+\alpha}{2}=10,\ \dfrac{6+\beta}{2}=2$ 에서

$\alpha=22\ ,\ \beta=-2$

$\therefore Q(22, -2)$

그리고 점 Q 가 선분 AB 를 $m : n$ (단, $m>0,\ n>0,\ m \neq n$) 으로 외분한다고 가정하면

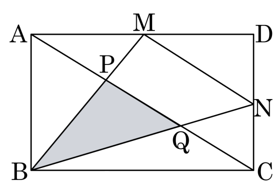
$\dfrac{4m+2n}{m-n}=22 \cdots$ ①,

$\dfrac{4m-6n}{m-n}=-2 \cdots$ ②

①, ②에서 $3m=4n$　　$\therefore m : n = 4 : 3$

그러므로 점 Q 는 선분 AB 를 4 : 3 으로 외분한다.

17. 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD 에서 $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ 의 중점을 각각 M , N 이라 하고, $\overline{BM}$, $\overline{BN}$ 과 $\overline{AC}$ 의 교점을 각각 P , Q 라 한다. 사각형 MPQN 의 넓이가 $30\,cm^2$ 일 때, 삼각형 PBQ 의 넓이는?



① $24\,cm^2$ ② $25\,cm^2$ ③ $28\,cm^2$
④ $30\,cm^2$ ⑤ $36\,cm^2$

해설

점 P 와 점 Q 가 각각 $\triangle ABD$, $\triangle DBC$ 의 무게중심이므로
$\overline{BP} : \overline{PM} = \overline{BQ} : \overline{QN} = 2 : 1$ 이고 $\overline{PQ} \,//\, \overline{MN}$ 이다.
$\triangle PBQ$ 와 $\triangle MBN$ 의 닮음비가 $2 : 3$ 이므로
$\triangle PBQ : \triangle MBN = 4 : 9$ 이다.
따라서, $\triangle PBQ : \square MPQN = 4 : 5$ 이므로 $\triangle PBQ : 30 = 4 : 5$
$\therefore\ \triangle PBQ = 24(cm^2)$

18. 세 점 $\mathrm{A}(1,\ 4)$, $\mathrm{B}(-2,\ 3)$, $\mathrm{C}(3,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle\mathrm{ABC}$ 가 있다. $\angle\mathrm{A}$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 $\mathrm{D}(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

각의 이등분선의 정리에 의해, $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}}$

$\therefore\ \sqrt{10} : 2\sqrt{10} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}} = 1 : 2$

$\therefore$ D 는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $1 : 2$로 내분하는 점이다.

$$\mathrm{D} = \left(\frac{1\times 3 + 2\times(-2)}{1+2}, \frac{1\times(-2) + 2\times 3}{1+2}\right) = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

$\therefore\ a+b = 1$