

1. 다음 방정식을 만족하는 x, y 의 값을 차례대로 구하여라.

$$2x - y = 4x + 10 = x + y - 5$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -5$

▷ 정답 : $y = 0$

해설

주어진 방정식은 다음의 연립방정식과 같다.

$$\begin{cases} 2x - y = 4x + 10 \\ 2x - y = x + y - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y + 10 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ x - 2y + 5 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡에서 $x = 2y - 5 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$

㉢을 ㉠에 대입하면 $2(2y - 5) + y + 10 = 0$

$$\therefore y = 0$$

$y = 0$ 을 ㉡에 대입하면 $x = -5$

$$\therefore x = -5, y = 0$$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y) 으로 나타내면?

① $(2, 1)$

② $(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2})$

③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

④ $(\sqrt{3}, 1)$

⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠} \\ x - y = 1 \quad \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉡을 $y = x - 1$ 로 변형하여

㉠에 대입하면

$$x^2 - (x - 1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$$

$$2x = 3$$

$$\therefore x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

3. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x + y$ 값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$$

$$(x - y)(x - 2y)$$

$$\Rightarrow (x - y)(x - 2y) = 0$$

$$\Rightarrow x = y \text{ 또는 } x = 2y$$

i) $x = y$

$$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$$

$$x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2$$

ii) $x = 2y$

$$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$$

$$y = \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$x + y = (4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$$

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 3 \end{cases}$ 의 해를

$x = a, y = b$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$x^2 + y^2 = 5 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 - xy + y^2 = 3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $5 - xy = 3, xy = 2$

$$\therefore ab = 2$$

5. 어떤 공장에서 A , B 의 두 제품을 생산하고 있다. A 제품의 생산량은 작년에 비하여 20% 증가하였고, B 제품은 25% 증가하였다. 올해 총 생산량이 작년보다 16개 늘어나 총 86개일 때, 작년의 B 제품의 생산량을 구하면?

▶ 답: 개

▷ 정답: 40 개

해설

작년 두 제품의 생산량을 차례로 a , b 라고 하면,
올해는 각각 $1.2a$, $1.25b$ 이다.

$$a + b = 70, 1.2a + 1.25b = 86$$

연립하여 풀면, $a = 30$, $b = 40$

6. 연립방정식 $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 의 해를 $x = \alpha, y = \beta$ 라 할 때,
 $\alpha + \beta$ 의 최솟값을 구하여라.

① -8

② -6

③ -4

④ -2

⑤ 0

해설

$$\begin{cases} (2x - y)(x + 2y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

1) $y = 2x$ 일 때

$$x^2 + 4x^2 = 5x^2 = 20$$

$$\therefore x = \pm 2, y = \pm 4$$

2) $x = -2y$ 일 때

$$4y^2 + y^2 = 5y^2 = 20$$

$$\therefore y = \pm 2, x = \mp 4$$

$$(x, y) = (2, 4), (-2, -4), (-4, 2), (4, -2)$$

$$\therefore \alpha + \beta = 6, -6, -2, 2$$

그러므로 $\alpha + \beta$ 의 최솟값은 -6

7. 연립방정식 $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 xy 는?

① 8

② 3

③ 0

④ -1

⑤ -3

해설

$$\begin{cases} x - y = 2 & \dots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 20 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

①식 ($x = y + 2$)을 ②식에 대입하면

$$(y + 2)^2 + y^2 = 20$$

$$2y^2 + 4y - 16 = 0$$

$$(y + 4)(y - 2) = 0$$

$$y = 2, x = 4 \rightarrow xy = 8$$

$$y = -4, x = -2 \rightarrow xy = 8$$

해설

①식을 제곱하면.

$$(x - y)^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4$$

$$xy = \frac{x^2 + y^2 - 4}{2} = \frac{20 - 4}{2} = 8$$

8. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ xy = -4 \end{cases}$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

x, y 는 t 에 대한 이차방정식 $t^2 + 3t - 4 = 0$ 의 두 근이므로
($t - 1$)($t + 4$) = 0 에서

$t = 1$ 또는 $t = -4$

따라서, 구하는 해는

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\therefore 1 + (-4) + (-4) + 1 = -6$$

9. 연립방정식 $xy = z$, $yz = x$, $zx = y$ 를 만족하는 0이 아닌 실수해 x, y, z 의 쌍 (x, y, z) 의 개수는?

① 1개

② 2개

③ 4개

④ 8개

⑤ 무수히 많다.

해설

주어진 식을 변변 곱하면 $(xyz)^2 = xyz$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xyz = 1$

여기에 $xy = z$ 를 대입하면 $z^2 = 1$, $z = \pm 1$

(i) $z = 1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면,

$$xy = 1, x = y$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, 1, 1), (-1, -1, 1)$$

(ii) $z = -1$ 을 주어진 연립방정식에 대입하면

$$xy = -1, x = -y$$

$$\therefore (x, y, z) = (1, -1, -1), (-1, 1, -1)$$

(i), (ii)에서 조건을 만족하는 (x, y, z) 는 모두 4개이다.

10. x 에 대한 두 이차방정식 $x^2 + ax + 5 = 0$, $x^2 + 5x + a = 0$ 이 공통근을 갖는 실수 a 의 값들의 합을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

공통근을 p 라 하면

$$p^2 + ap + 5 = 0, p^2 + 5p + a = 0$$

두 식을 빼면, $(a - 5)p = a - 5$

$$(a - 5)(p - 1) = 0$$

$$\therefore a = 5 \text{ 또는 } p = 1$$

$$p = 1 \text{이면, } 1 + a + 5 = 0, a = -6$$

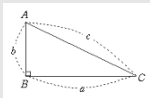
$$\therefore a \text{의 합: } -6 + 5 = -1$$

11. 넓이가 30 이고, 둘레의 길이가 30 인 직각삼각형의 빗변의 길이를 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설



$$\frac{1}{2}ab = 30, ab = 60$$

$$a + b + c = 30, a + b = 30 - c$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (a + b)^2 - 2ab = c^2$$

$$(30 - c)^2 - 2 \cdot 60 = c^2$$

$$c^2 - 60c + 900 - 120 = c^2$$

$$60c = 780, \therefore c = 13$$

12. 연립방정식 $\begin{cases} x + y = k \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$ 의 해가 오직 한 쌍이기 위한 실수 k 의 값은 k_1, k_2 의 두 개다. 이 때, $k_1 k_2$ 의 값은?

① -10

② -8

③ -6

④ -4

⑤ -2

해설

$$\begin{cases} x + y = k & \dots \textcircled{㉠} \\ x^2 + 2y^2 = 4 & \dots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

㉠에서 $y = -x + k$ 를 ㉡에 대입하면

$$x^2 + 2(-x + k)^2 = 4$$

$$3x^2 - 4kx + 2k^2 - 4 = 0 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

이차방정식 ㉢이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 3(2k^2 - 4) = 0$$

$$4k^2 - 6k^2 + 12 = 0, \quad k^2 = 6$$

$$\therefore k = \pm \sqrt{6}$$

$$\therefore k_1 k_2 = \sqrt{6} \times (-\sqrt{6}) = -6$$

13. 방정식 $2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 에 대하여 $x + y$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{3}{2}$

② -1

③ $-\frac{1}{2}$

④ $-\frac{1}{4}$

⑤ $-\frac{1}{7}$

해설

$2x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 1 = 0$ 에서

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$(x + 2y)^2 + (x + 1)^2 = 0$$

x, y 가 실수이므로 $x + 2y = 0 \dots\dots ①, x + 1 = 0 \dots\dots ②$

①, ②에서 $x = -1, y = \frac{1}{2}$

$$\therefore x + y = -\frac{1}{2}$$

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 정리하면 $2x^2 + 2(2y+1)x + (4y^2+1) = 0 \dots\dots ①$

x 가 실수이므로 $\frac{D}{4} = (2y + 1)^2 - 2(4y^2 + 1) \geq 0$

$$\therefore (2y - 1)^2 \leq 0$$

그런데 $2y - 1$ 이 실수이므로 $2y - 1 = 0$

$$\therefore y = \frac{1}{2} \dots\dots ②$$

②를 ①에 대입하면

$$2x^2 + 4x + 2 = 0, (x + 1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1 \dots\dots ③$$

②, ③에서 $x + y = -\frac{1}{2}$

14. 방정식 $x^2 - 2xy + y^2 + |x + y - 2| = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 xy 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

주어진 방정식을 정리하면 $(x - y)^2 + |x + y - 2| = 0$

이 때, $(x - y)^2 \geq 0$, $|x + y - 2| \geq 0$ 이므로

㉠이 성립하려면 $x - y = 0$, $x + y - 2 = 0$ 이어야 한다.

두 식을 연립하여 풀면 $x = 1$, $y = 1$

$\therefore xy = 1$

15. 이차방정식 $2x^2 - 5x + k = 0$ 의 근이 유리수가 되는 k 의 최대 정수값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

근이 유리수이므로, 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$D = 25 - 8k \geq 0$ 곧, $k \leq \frac{25}{8}$ 이어야 한다.

k 는 정수이므로 $k = 3, 2, 1, \dots$ 이고,

이 중 $D \geq 0$ 조건을 만족하는 최대 정수는 $k = 3$ 이다.

16. 다음 식을 만족하는 자연수의 순서쌍 (m, n) 의 개수는?

$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5개 이상

해설

$$\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$$

$$(m-4)(n-2) = 8$$

$$8 = 1 \times 8 = 2 \times 4 = 4 \times 2 = 8 \times 1 \text{ 이므로}$$

$$(m, n) = (5, 10), (6, 6), (8, 4), (12, 3)$$

$\therefore$ 4쌍의 (m, n) 이 존재한다.

17. 방정식 $xy + 2x = 3y + 10$ 을 만족하는 양의 정수가 $x = \alpha$, $y = \beta$ 일 때, $\alpha\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

주어진 식을 변형하면

$$xy + 2x - 3y = 10, \quad xy + 2x - 3y - 6 = 4,$$

$$(x - 3)(y + 2) = 4$$

$y + 2 \geq 3$ 이므로 두 자연수의 곱이 4가 되는 경우는

$$x - 3 = 1, \quad y + 2 = 4$$

$$\therefore x = 4, \quad y = 2$$

18. 이차방정식 $x^2 - ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되게 하는 모든 상수 a 에 대한 설명 중 옳은 것은?

① a 는 -10 이상 -2 이하이다.

② a 는 -2 이상 6 이하이다.

③ a 는 6 이상이다.

④ a 는 0 이하이다.

⑤ a 는 0 이상 8 이하이다.

해설

두 정수근을 α, β 라 하면 (단, $\beta \geq \alpha$)

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a + 2$$

이 두 식에서 a 를 소거하면

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 2, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$$

$\alpha - 1, \beta - 1$ 이 정수이므로

$$\therefore \alpha = 2, \beta = 4 \text{ 또는 } \alpha = -2, \beta = 0$$

$$\therefore a = 6, -2$$

19. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점 이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점 짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9

② 10

③ 11

④ 12

⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x , 3 점 문항을 y ,
4 점 문항을 z 라 하자

$$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x + y + z = 30 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} - 4 \times \textcircled{㉡} \Rightarrow y = 40 - 2x$$

$$\textcircled{㉠} - 3 \times \textcircled{㉡} \Rightarrow z = x - 10$$

$$\therefore x = 10 \text{ 이면 } z = 0$$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$$\therefore x \geq 11, \text{ 최소 11 문항}$$

20. 이차방정식 $x^2 - (m + 4)x + 3 - 2m = 0$ 이 양의 정수근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① 5

② 10

③ 13

④ 17

⑤ 20

해설

$x^2 - (m + 4)x + 3 - 2m = 0$ 의 두 근을 α, β ($\alpha \geq \beta$)라 하면
근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + \beta = m + 4 \cdots$ ①

$$\alpha\beta = 3 - 2m \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \text{를 하면 } \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 11$$

$$\therefore (\alpha + 2)(\beta + 2) = 15$$

$\alpha + 2 \geq 3, \beta + 2 \geq 3, \alpha \geq \beta$ 이므로

$$\alpha + 2 = 5, \beta + 2 = 3$$

$$\therefore \alpha = 3, \beta = 1$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 9 + 1 = 10$$