

1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k 의 값의 범위는?

① $k < 1$

② $1 < k < 3$

③ $k < 3$

④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$$k^2 - 6k + 5 > 0, (k-1)(k-5) > 0$$

$$\therefore k < 1 \text{ 또는 } k > 5$$

2. 다음 이차함수 중 최솟값을 갖는 것은?

① $y = -3x^2$

② $y = -x^2 + 2x + 1$

③ $y = -2(x - 1)^2$

④ $y = (x + 1)^2 + 3$

⑤ $y = 3 - x^2$

해설

이차함수에서 이차항의 계수가 양수이면 꼭짓점이 최솟값을 가지고, 음수이면 꼭짓점이 최댓값을 갖는다.

3. 실수 a, b 에 대하여 $a > b$ 일 때, 다음 <보기> 중 항상 성립하는 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $|a| > |b|$

㉡ $a^3 > b^3$

㉢ $a^2 > b^2$

㉣ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $a > 0 > b$ 인 경우에는 b 의 절댓값이 더 클 수도 있다.

㉢ ㉠과 같은 맥락에서 생각해 볼 수 있다.

㉣ 역시 $a > 0 > b$ 인 경우 역수를 취하여도 부등호 방향은 변하지 않는다.

4. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x + 4 > 5x \\ 15 - x > a \end{cases}$$

① 3, 4

② 5, 6

③ 6

④ 6, 7

⑤ 4, 5, 6

해설

$$7x + 4 > 5x$$

$$\therefore x > -2$$

$$15 - x > a$$

$$\therefore x < 15 - a$$

만족하는 정수는 10 개이므로 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ 이다.

$$8 < 15 - a \leq 9$$

$$6 \leq a < 7$$

$$\therefore a = 6$$

5. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$ 의 해가 $a < x < b$ 일 때, $b - a$ 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x - 4)(x + 2) < 0$
 $\therefore -2 < x < 4$
 $b - a = 6$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 2x^2 + 3x - 2 \leq 0 \\ 2x^2 + x - 3 < 0 \end{cases}$ 을 풀면?

- ① $-2 < x \leq \frac{1}{2}$ ② $-2 < x \leq 1$ ③ $-\frac{3}{2} < x \leq 1$
④ $-\frac{3}{2} < x \leq \frac{1}{2}$ ⑤ $1 < x \leq 2$

해설

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x - 2 \leq 0 & \cdots (가) \\ 2x^2 + x - 3 < 0 & \cdots (나) \end{cases}$$

(가)에서 $(2x - 1)(x + 2) \leq 0$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

(나)에서 $(2x + 3)(x - 1) < 0$

$$\therefore -\frac{3}{2} < x < 1$$

따라서 공통 범위를 구하면

$$-\frac{3}{2} < x \leq \frac{1}{2}$$

7. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$$A(\sqrt{5}-1, 1-\sqrt{2}), B(\sqrt{5}, 1+\sqrt{2})$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{5}+1)^2 + (1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{1+8} = 3\end{aligned}$$

8. 두 점 A (-3,2) , B (4,5) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① (0, 0)

② (1, 0)

③ (2, 0)

④ (3, 0)

⑤ (4, 0)

해설

P(x,0)이라 놓으면 두 점 사이의 거리의 공식에 의하여

$$\sqrt{(x+3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (5-0)^2} \Rightarrow 14x = 28 \Rightarrow$$

$$x = 2$$

$$\therefore P(2,0)$$

9. 네 점 $O(0,0)$, $A(-3,0)$, $B(4,0)$, $C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC의 넓이는 삼각형 BOC의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$

② $\frac{4}{7}$

③ $\frac{3}{4}$

④ $\frac{4}{3}$

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 높이가 같으므로

$\triangle AOC$ 와 $\triangle BOC$ 의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.

$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$ 이므로 $\triangle AOC$ 의 넓이는 $\triangle BOC$ 의 넓이의 $\frac{3}{4}$ 배이다.

10. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

11. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$ 의 해를 구하면?

- ① $x = 1, x = -1 \pm 2i$
- ② $x = -1, x = 1 \pm 2i$
- ③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$
- ④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$
- ⑤ $x = 1$

해설

1	1	0	0	-4	3
	1	1	1	-3	
1	1	1	1	-3	0
		1	2	3	
	1	2	3	0	

$(x-1)^2(x^2+2x+3)=0, x=1, -1\pm\sqrt{2}i$

12. x, y 에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록

하는 a 값은?

① $a = -1$

② $a = 1$

③ $a = \pm 1$

④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수

⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}, -a^2 \neq -1$$

$$\therefore a \neq \pm 1$$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a 의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

13. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y 에 대하여 $x + y$

값이 될 수 없는 것은?

① $3\sqrt{2}$

② 4

③ $-3\sqrt{2}$

④ -4

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ 에서

$(x - y)(x - 2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$$

$$x = \pm 2, y = \pm 2$$

ii) $x = 2y$ 일 때

$$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$$

$$y = \pm \sqrt{2}, x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$$

14. 이차함수 $y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때, 최댓값 3 을 가진다. 이때, ac 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{15}{2}$

해설

$y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때,

최댓값 3 이므로

$$y = a(x + 6)^2 + 3 = ax^2 + 12ax + 36a + 3$$

$12a = -6$, $36a + 3 = c$ 이므로

$$a = -\frac{1}{2} , -18 + 3 = c , c = -15$$

$$\therefore ac = -\frac{1}{2} \times (-15) = \frac{15}{2}$$

15. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax + a - 2$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{33}{16}$

해설

$$\begin{aligned}y &= -x^2 + 4ax + a - 2 \\&= -(x^2 - 4ax) + a - 2 \\&= -(x - 2a)^2 + 4a^2 + a - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{최댓값 } M &= 4a^2 + a - 2 \\&= 4\left(a^2 + \frac{1}{4}a\right) - 2 \\&= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 \\&= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{16}\end{aligned}$$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{33}{16}$ 이다.

16. 둘레의 길이가 24 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 12 cm

해설

반지름 x cm , 호의 길이를 $(24 - 2x)$ cm 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24 - 2x) \\ &= x(12 - x) \\ &= -x^2 + 12x \\ &= -(x^2 - 12x + 36) + 36 \\ &= -(x - 6)^2 + 36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 6 cm 일 때,
부채꼴의 넓이가 최댓값 36 cm^2 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24 - 2x = 12 \text{ cm}$ 이다.

17. 지면으로부터 초속 30m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 y m 라 할 때, $y = 30x - 5x^2$ 라고 한다. 이 물체의 높이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 : m

▷ 정답 : 45 m

해설

$$y = -5x^2 + 30x = -5(x - 3)^2 + 45$$

18. 방정식 $x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a 의 값들의 합은?

① 30 ② 25 ③ 23 ④ 18 ⑤ 13

해설

$x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2 = y$ 라고 치환하여 $y^2 - ay + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

i) $D = a^2 - 4(8 - a) = a^2 + 4a - 32 = (a + 8)(a - 4) > 0$
 $\therefore a < -8$ 또는 $a > 4$

ii) $a > 0$

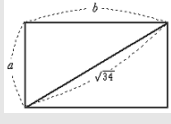
iii) $8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$

$\therefore 4 < a < 8$ 이므로 $a = 5, 6, 7$

19. 대각선의 길이가 $\sqrt{34}$ m 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 2 m 씩 늘였더니, 넓이가 20 m^2 만큼 늘어졌다고 한다. 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 구하면?

- ① 가로의 길이: 3 m, 세로의 길이: 5 m
② 가로의 길이: 5 m, 세로의 길이: 3 m
③ 가로의 길이: 3 m, 세로의 길이: 5 m 또는 가로의 길이: 5 m, 세로의 길이: 3 m
④ 가로의 길이: $(3\sqrt{6}-2)$ m, 세로의 길이: $(3\sqrt{6}-2)$ m
⑤ 가로의 길이: $\sqrt{3}$ m, 세로의 길이: $\sqrt{5}$ m

해설



$$a^2 + b^2 = (\sqrt{34})^2 = 34$$

$$(a+2)(b+2) = ab + 20$$

$$ab + 2(a+b) + 4 = ab + 20$$

$$\therefore a + b = 8$$

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 64 - 34 = 30$$

$$\therefore ab = 15 \quad b = 8 - a$$

$$a \cdot (8 - a) = 15 \rightarrow (a - 5)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3, b = 5 \text{ 또는 } a = 5, b = 3$$

20. 방정식 $2xy-4x-y=4$ 를 만족하는 양의 정수 x, y 를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$$\begin{cases} x=y \\ y=\delta \end{cases} \text{ 이다.}$$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$
조건에서 x, y 가 양의 정수이므로
 $2x-1, y-2$ 도 각각 정수이고 특히 $2x-1$ 은 양의 홀수이다.

$$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases} \quad \text{또는} \quad \begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$$

21. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1 < 3 \\ x+3 \geq a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 이를 만족하는 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\begin{cases} 2x-1 < 3 \cdots \textcircled{1} \\ x+3 \geq a \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{라 두면,}$$

$$\textcircled{1} : \begin{aligned} 2x &< 4 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} : x \geq a-3$$

이고, 해가 존재하지 않으려면 $a-3 \geq 2$ 이다.
따라서 $a \geq 5$ 이므로 a 의 최솟값은 5이다.

22. 이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근의 합이 10 일 때, 방정식 $f(4x - 3) = 0$ 의 두 근의 합은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 $\alpha + \beta = 10$

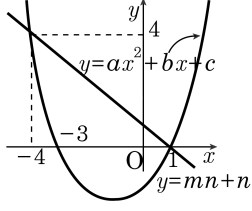
$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ 로 놓으면

$f(4x - 3) = a(4x - 3 - \alpha)(4x - 3 - \beta) = 0$

$x = \frac{3 + \alpha}{4}, \frac{3 + \beta}{4}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $\frac{6 + \alpha + \beta}{4} = 4$

23. 다음 그림은 일차함수 $y = mx + n$ 과 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 다음 [보기] 중 옳은 것의 개수는?



보기

- ㉠ 연립방정식
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$
 의 해는 $x = -4, y = 4$ 와 $x = 1, y = 0$ 이다.
- ㉡ 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 의 해는 $x \leq -3$ 또는 $x \geq 1$ 이다.
- ㉢ 부등식 $ax^2 + bx + c \leq mx + n$ 의 해는 $-4 \leq x \leq 1$ 이다.
- ㉣ 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 에서 $a = 1$ 이다.
- ㉤ 일차함수 $y = mx + n$ 에서 $m = -\frac{4}{5}$ 이다.

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ 교차점이 연립방정식의 해이다 (참)

㉡ 빗금 친 부분에 해당한다. 즉, $-4 \leq x \leq 1$

㉢, ㉤ 먼저 $(-4, 4)(1, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$y = \left(\frac{4 - 0}{-4 - 1} \right)(x + 4) + 4 = -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$$

연립방정식에 구한 직선의 방정식을 넣으면

$$\begin{aligned} ax^2 + \left(b + \frac{4}{5}\right)x + c - \frac{4}{5} &= a(x + 4)(x - 1) \\ &= ax^2 + 3ax - 4a \end{aligned}$$

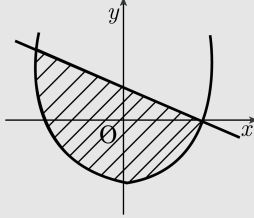
$$\Rightarrow b + \frac{4}{5} = 3a, \quad c - \frac{4}{5} = -4a$$

그리고 이차함수는 $(-3, 0)$ 을 지나므로

$$9a - 3b + c = 0$$

$$\text{위의 세 식을 연립하면 } a = \frac{4}{5}$$

$\therefore$ ㉠, ㉡, ㉢, ㉤ : 참



24. 구슬을 보관함 1 상자당 구슬을 4 개씩 넣으면 구슬이 5 개가 남고, 구슬을 5 개씩 넣으면 모두 넣을 수 있지만 마지막 보관함에는 구슬이 2 개 이상 4 개 이하가 들어간다. 보관함의 개수로 가능한 것의 개수로 틀린 것을 모두 고르면?

- ① 4 상자
- ② 5 상자
- ③ 6 상자
- ④ 7 상자
- ⑤ 8 상자

해설

보관함 x 상자가 있다고 하면, 구슬의 수는 $(4x + 5)$ 개 이다. 구슬을 5 개씩 넣을 경우 $x - 1$ 개 까지는 5 개씩 들어가 있지만 마지막 보관함에는 2 개 이상 4 개 이하가 들어가게 된다. 2 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면, $5(x - 1) + 2$ 이고, 4 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $5(x - 1) + 4$ 이다. 구슬의 수는 보관함에 5 개씩 넣고 마지막 보관함에 2 개가 들어있는 경우와 4 개가 들어있는 경우 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $5(x - 1) + 2 \leq 4x + 5 \leq 5(x - 1) + 4$ 이다. 이를 연립부등식으로

나타내면 $\begin{cases} 5(x - 1) + 2 \leq 4x + 5 \\ 4x + 5 \leq 5(x - 1) + 4 \end{cases}$ 이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \leq 8 \\ x \geq 6 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 $6 \leq x \leq 8$

이다. 따라서 보관함은 6상자 또는 7상자 또는 8상자가 있다.

25. 임의의 실수 x 에 대하여 $\sqrt{ax^2+ax+b}$ 가 실수일 때, 계수 a, b 가 만족하는 조건을 구하면?
- ① $0 \leq a \leq 4b$

② $0 < a \leq 4b$

③ $0 \leq a < 4b$

④ $0 < a < 4b$

⑤ $0 < a \leq 4b$

해설

모든 실수 x 에 대하여
 $ax^2+ax+b \geq 0$ 을 만족해야 하므로
i) $a=0$ 일 때, $b \geq 0 \cdots \textcircled{1}$
ii) $a>0$ 일 때,
 $D=a^2-4ab \leq 0$
 $a-4b \leq 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $0 \leq a \leq 4b$