1. 이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위는?

① $k < 1$ ② $1 < k < 3$

③ $k < 3$ ④ $3 < k < 5$

⑤ $k < 1$ 또는 $k > 5$

해설

이차함수 $y = x^2 - 2(k-3)x + 4$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 이차방정식 $x^2 - 2(k-3)x + 4 = 0$ 의 판별식을 D라 하면 $D > 0$이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 4 > 0$$

$k^2 - 6k + 5 > 0$, $(k-1)(k-5) > 0$

$\therefore k < 1$ 또는 $k > 5$

2. 다음 이차함수 중 최솟값을 갖는 것은?

① $y = -3x^2$

② $y = -x^2 + 2x + 1$

③ $y = -2(x-1)^2$

④ $y = (x+1)^2 + 3$

⑤ $y = 3 - x^2$

해설

이차함수에서 이차항의 계수가 양수이면 꼭짓점이 최솟값을 가지고, 음수이면 꼭짓점이 최댓값을 갖는다.

3. 실수 a, b에 대하여 $a > b$일 때, 다음 <보기> 중 항상 성립하는 것을 모두 골라라.

보기

㉠ $|a| > |b|$

㉡ $a^3 > b^3$

㉢ $a^2 > b^2$

㉣ $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉠, ㉡ , ㉢

⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $a > 0 > b$인 경우에서는 b의 절댓값이 더 클 수도 있다.

㉢ ㉠과 같은 맥락에서 생각해 볼 수 있다.

㉣ 역시 $a > 0 > b$인 경우 역수를 취하여도 부등호 방향은 변하지 않는다.

4. 다음 연립부등식을 만족하는 정수의 개수가 10 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

$$\begin{cases} 7x+4>5x \\ 15-x>a \end{cases}$$

① 3, 4 ② 5, 6 ③ 6 ④ 6, 7 ⑤ 4, 5, 6

해설

$7x+4>5x$

$\therefore\ x>-2$

$15-x>a$

$\therefore\ x<15-a$

만족하는 정수는 10 개이므로 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ 이다.

$8<15-a\le 9$

$6\le a<7$

$\therefore\ a=6$

5. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $b - a$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x-4)(x+2) < 0$

$\therefore -2 < x < 4$

$b - a = 6$

6. 연립부등식 $\begin{cases} 2x^2+3x-2 \le 0 \\ 2x^2+x-3 < 0 \end{cases}$ 을 풀면?

① $-2 < x \le \frac{1}{2}$　② $-2 < x \le 1$　③ $-\frac{3}{2} < x \le 1$
④ $-\frac{3}{2} < x \le \frac{1}{2}$　⑤ $1 < x \le 2$

해설

$$\begin{cases} 2x^2+3x-2 \le 0 & \cdots (\text{가}) \\ 2x^2+x-3 < 0 & \cdots (\text{나}) \end{cases}$$

(가)에서 $(2x-1)(x+2) \le 0$

$\therefore -2 \le x \le \frac{1}{2}$

(나)에서 $(2x+3)(x-1) < 0$

$\therefore -\frac{3}{2} < x < 1$

따라서 공통 범위를 구하면

$-\frac{3}{2} < x \le \frac{1}{2}$

7. 다음 두 점 사이의 거리를 구하여라.

$A(\sqrt{5}-1, 1-\sqrt{2}),\ B(\sqrt{5}, 1+\sqrt{2})$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$$\overline{AB} = \sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{5}+1)^2+(1+\sqrt{2}-1+\sqrt{2})^2}$$
$$= \sqrt{1+8} = 3$$

8. 두 점 A $(-3,2)$, B $(4,5)$ 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P 의 좌표를 구하면?

① $(0,\ 0)$ ② $(1,\ 0)$ ③ $(2,\ 0)$

④ $(3,\ 0)$ ⑤ $(4,\ 0)$

해설

$\mathrm{P}(x,0)$ 이라 놓으면 두 점 사이의 거리의 공식에 의하여

$\sqrt{(x+3)^2+(2-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(5-0)^2} \Rightarrow 14x = 28 \Rightarrow$

$x = 2$

$\therefore\ \ \mathrm{P}\ (2,0)$

9. 네 점 $O(0,0), A(-3,0), B(4,0), C(2,5)$ 에 대하여 삼각형 AOC의 넓이는 삼각형 BOC의 넓이의 몇 배인가?

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$\triangle$AOC와 $\triangle$BOC의 높이가 같으므로
$\triangle$AOC와 $\triangle$BOC의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 비와 같다.
$\overline{AO} : \overline{BO} = 3 : 4$이므로 $\triangle$AOC의 넓이는 $\triangle$BOC의 넓이의 $\frac{3}{4}$배이다.

10. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

11. 방정식 $x^4 - 4x + 3 = 0$의 해를 구하면?

① $x = 1, x = -1 \pm 2i$ ② $x = -1, x = 1 \pm 2i$

③ $x = 1, x = -1 \pm \sqrt{2}i$ ④ $x = -1, x = 1 \pm \sqrt{2}i$

⑤ $x = 1$

해설

$$
\begin{array}{c|ccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 3 \\
 & & 1 & 1 & 1 & -3 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & -3 & \boxed{0} \\
 & & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \\
\end{array}
$$

$(x-1)^2(x^2+2x+3) = 0,\ x = 1, -1 \pm \sqrt{2}i$

12. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{cases} ax - y = a \\ x - ay = 1 \end{cases}$ 이 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는 a값은?

① $a = -1$
② $a = 1$
③ $a = \pm 1$
④ $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수
⑤ 없다.

해설

연립방정식이 오직 한 쌍의 해를 가지려면

$\frac{a}{1} \neq \frac{-1}{-a}$, $-a^2 \neq -1$

$\therefore\ a \neq \pm 1$

따라서 오직 한 쌍의 해를 갖도록 하는

a의 값은 $a \neq \pm 1$ 인 모든 실수이다.

13. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 12 \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대하여 $x+y$ 값이 될 수 <u>없는</u> 것은?

① $3\sqrt{2}$ ② 4 ③ $-3\sqrt{2}$

④ -4 ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

$x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$에서

$(x-y)(x-2y) = 0 \quad \therefore x = y$ 또는 $x = 2y$

ⅰ) $x = y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 3x^2 = 12$

$x = \pm 2,\ y = \pm 2$

ⅱ) $x = 2y$ 일 때

$x^2 + 2y^2 = 6y^2 = 12$

$y = \pm\sqrt{2},\quad x = \pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x + y = 4, -4, 3\sqrt{2}, -3\sqrt{2}$

14. 이차함수 $y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때, 최댓값 3 을 가진다. 이때, ac 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{15}{2}$

해설

$y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때,
최댓값 3 이므로
$y = a(x+6)^2 + 3 = ax^2 + 12ax + 36a + 3$
$12a = -6$, $36a + 3 = c$ 이므로
$a = -\frac{1}{2}$, $-18 + 3 = c$, $c = -15$
$\therefore ac = -\frac{1}{2} \times (-15) = \frac{15}{2}$

15. 이차함수 $y = -x^2 + 4ax + a - 2$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{33}{16}$

해설

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + 4ax + a - 2 \\
&= -(x^2 - 4ax) + a - 2 \\
&= -(x - 2a)^2 + 4a^2 + a - 2
\end{aligned}
$$

최댓값 $M = 4a^2 + a - 2$

$$
\begin{aligned}
&= 4\left(a^2 + \frac{1}{4}a\right) - 2 \\
&= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{16} - 2 \\
&= 4\left(a + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{33}{16}
\end{aligned}
$$

따라서 M 의 최솟값은 $-\frac{33}{16}$ 이다.

16. 둘레의 길이가 24 cm 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ **답 :** ______ cm

▷ **정답 :** 12 cm

해설

반지름 x cm , 호의 길이를 $(24-2x)$ cm 라 두면

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\
&= x(12-x) \\
&= -x^2+12x \\
&= -(x^2-12x+36)+36 \\
&= -(x-6)^2+36
\end{aligned}
$$

따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이가 6 cm 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 36 cm^2 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24-2x = 12$ cm 이다.

17. 지면으로부터 초속 30m 로 쏘아 올린 물체의 t 초 후의 높이를 ym 라 할 때, $y=30x-5x^2$ 라고 한다. 이 물체의 높이의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :** ____m

▷ **정답 :** 45 m

해설

$y=-5x^2+30x=-5(x-3)^2+45$

18. 방정식 $x^4-ax^2+8-a=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a의 값들의 합은?

① 30 ② 25 ③ 23 ④ 18 ⑤ 13

해설

$x^4-ax^2+8-a=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2=y$라고 치환하여 $y^2-ay+8-a=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

i) $D=a^2-4(8-a)=a^2+4a-32=(a+8)(a-4)>0$

$\therefore a<-8$ 또는 $a>4$

ii) $a>0$

iii) $8-a>0 \Rightarrow a<8$

$\therefore 4<a<8$ 이므로 $a=5,\ 6,\ 7$

19. 대각선의 길이가 $\sqrt{34}\,\mathrm{m}$ 인 직사각형 모양의 땅이 있다. 이 땅의 가로, 세로의 길이를 각각 $2\,\mathrm{m}$ 씩 늘였더니, 넓이가 $20\,\mathrm{m}^2$ 만큼 넓어졌다고 한다. 처음 땅의 가로, 세로의 길이를 구하면?

① 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$5\,\mathrm{m}$

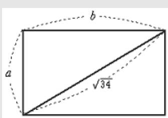
② 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$3\,\mathrm{m}$

③ 가로의 길이 : $3\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$5\,\mathrm{m}$ 또는 가로의 길이 : $5\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$3\,\mathrm{m}$

④ 가로의 길이 : $(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 :$(3\sqrt{6}-2)\,\mathrm{m}$

⑤ 가로의 길이 : $\sqrt{3}\,\mathrm{m}$, 세로의 길이 : $\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

해설



$a^2+b^2=(\sqrt{34})^2=34$

$(a+2)(b+2)=ab+20$

$ab+2(a+b)+4=ab+20$

$\therefore\ a+b=8$

$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=64-34=30$

$\therefore\ ab=15\ b=8-a$

$a\cdot(8-a)=15\ \rightarrow\ (a-5)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3, b=5$ 또는 $a=5, b=3$

20. 방정식 $2xy-4x-y=4$를 만족하는 양의 정수 x, y를 구하면 $\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$,

$\begin{cases} x=\gamma \\ y=\delta \end{cases}$ 이다.

$\alpha+\beta+\gamma+\delta$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 15

해설

주어진 식을 변형하면 $(2x-1)(y-2)=6$
조건에서 x, y가 양의 정수이므로
$2x-1$, $y-2$도 각각 정수이고 특히 $2x-1$은 양의 홀수이다.

$\therefore \begin{cases} 2x-1=1 \\ y-2=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} 2x-1=3 \\ y-2=2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$\therefore\ \alpha+\beta+\gamma+\delta=15$

21. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1< & 3 \\ x+3\geq & a \end{cases}$ 의 해가 없을 때, 이를 만족하는 a 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\begin{cases} 2x-1<3\cdots① \\ x+3\geq a\cdots② \end{cases}$ 라 두면,

① : $2x<4$

$x<2$

② : $x\geq a-3$

이고, 해가 존재하지 않으려면 $a-3\geq 2$ 이다.

따라서 $a\geq 5$ 이므로 a의 최솟값은 5이다.

22. 이차방정식 $f(x)=0$ 의 두 근의 합이 10일 때, 방정식 $f(4x-3)=0$ 의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 하면 $\alpha+\beta=10$

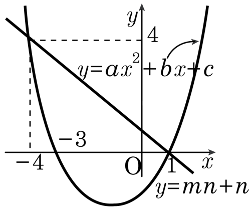
$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0$ 로 놓으면

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$x=\dfrac{3+\alpha}{4},\quad \dfrac{3+\beta}{4}$

$\therefore$ 두 근의 합은 $\dfrac{6+\alpha+\beta}{4}=4$

23. 다음 그림은 일차함수 $y = mx + n$과 이차함수$y = ax^2 + bx + c$의 그래프이다. 다음 [보기] 중 옳은 것의 개수는?



보기

㉮ 연립방정식
$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + n \end{cases}$$ 의 해는
$x = -4,\ y = 4$와 $x = 1,\ y = 0$
이다.

㉯ 부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$의 해는
$x \leq -3$ 또는 $x \geq 1$이다.

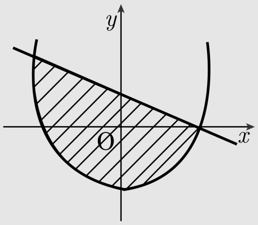
㉰ 부등식 $ax^2 + bx + c \leq mx + n$의
해는 $-4 \leq x \leq 1$이다.

㉱ 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$에서
$a = 1$이다.

㉲ 일차함수 $y = mx + n$ 에서
$m = -\dfrac{4}{5}$이다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설



㉮ 교차점이 연립방정식의 해이다 (참)
㉰ 빗금 친 부분에 해당한다. 즉, $-4 \leq x \leq 1$
㉱, ㉲ 먼저 $(-4, 4)(1, 0)$ 을 지나는 직선의
방정식을 구하면
$$y = \left(\frac{4-0}{-4-1}\right)(x+4) + 4 = -\frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$$
연립방정식에 구한 직선의 방정식을 넣으면
$$\begin{aligned} ax^2 + \left(b + \frac{4}{5}\right)x + c - \frac{4}{5} &= a(x+4)(x-1) \\ &= ax^2 + 3ax - 4a \end{aligned}$$
$$\Rightarrow \quad b + \frac{4}{5} = 3a, \quad c - \frac{4}{5} = -4a$$
그리고 이차함수는 $(-3, 0)$ 을 지나므로
$9a - 3b + c = 0$
위의 세 식을 연립하면 $a = \dfrac{4}{5}$
$\therefore$ ㉮, ㉯, ㉰, ㉲ : 참

24. 구슬을 보관함 1상자당 구슬을 4 개씩 넣으면 구슬이 5 개가 남고, 구슬을 5 개씩 넣으면 모두 넣을 수 있지만 마지막 보관함에는 구슬이 2 개 이상 4 개 이하가 들어간다. 보관함의 개수로 가능한 것의 개수로 <u>틀린</u> 것을 모두 고르면?

① 4 상자 ② 5 상자 ③ 6 상자

④ 7 상자 ⑤ 8 상자

해설

보관함 x상자가 있다고 하면, 구슬의 수는 $(4x+5)$ 개 이다. 구슬을 5 개씩 넣을 경우 $x-1$ 개 까지는 5 개씩 들어가 있지만 마지막 보관함에는 2 개 이상 4 개 이하가 들어가게 된다. 2 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면, $5(x-1)+2$ 이고, 4 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $5(x-1)+4$ 이다. 구슬의 수는 보관함에 5 개씩 넣고 마지막 보관함에 2 개가 들어있는 경우와 4 개가 들어있는 경우 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $5(x-1)+2 \le 4x+5 \le 5(x-1)+4$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 5(x-1)+2 \le 4x+5 \\ 4x+5 \le 5(x-1)+4 \end{cases}$ 이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 8 \\ x \ge 6 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 $6 \le x \le 8$ 이다. 따라서 보관함은 6상자 또는 7상자 또는 8상자가 있다.

25. 임의의 실수 x에 대하여 $\sqrt{ax^2+ax+b}$가 실수일 때, 계수 a, b가 만족하는 조건을 구하면?

① $0 \le a \le 4b$ ② $0 < a \le 4b$ ③ $0 \le a < 4b$

④ $0 < a < 4b$ ⑤ $0 < a < 4b$

해설

모든 실수 x에 대하여

$ax^2+ax+b \ge 0$을 만족해야 하므로

i) $a=0$일 때, $b \ge 0 \cdots$ ①

ii) $a>0$일 때,

$D=a^2-4ab \le 0$

$a-4b \le 0 \cdots$ ②

①, ②에서 $0 \le a \le 4b$