

1. 다음 이차방정식 중에서 근의 개수가 다른 하나는?

① $x^2 + 3x + 3 = 0$

② $3x^2 + 2x - 10 = 0$

③ $3x^2 - 6x + 1 = 0$

④ $x^2 + 2x - 4 = 0$

⑤ $(x - 2)^2 = 3$

해설

① $D = 9 - 12 < 0$ 이므로 해가 없다.
나머지 모두 해의 갯수는 2개이다.

2. 다음 이차방정식 중에서 서로 다른 두 개의 근을 갖는 것은?

① $x^2 - 2x + 1 = 0$

② $x^2 - 6x + 9 = 0$

③ $x^2 + x + 2 = 0$

④ $x^2 - 4x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 1 = 0$

해설

① $D = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$: 중근

② $D = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$: 중근

③ $D = 1^2 - 4 \times 1 \times 2 < 0$: 근이 없다.

④ $D = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$: 근이 없다.

⑤ $D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$: 서로 다른 두 근

3. 방정식 $(2-x-y)^2 - (x^2 + y^2) = 4$ 를 만족하는 자연수의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 값을 구하여라. (단 $x \neq y$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

$$(2-x-y)^2 - (x^2 + y^2) = 4,$$

$$xy - 2(x+y) = 0, \quad (x-2)(y-2) = 4$$

$x-2$	1	2	4	-1	-2	-4
$y-2$	4	2	1	-4	-2	-1

이 중에서 x, y 가 자연수인 경우는 (단, $x \neq y$)

x	3	6
y	6	3

따라서 $x^2 + y^2 = 3^2 + 6^2 = 45$ 이다.

4. 이차방정식 $x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 두 근 중에서 양수를 a 라 할 때, $n < a < n + 1$ 을 만족하는 정수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2 + 4x - 1 = 0$ 의 두 근은 $x = -2 \pm \sqrt{5}$

a 는 양수이므로 $a = -2 + \sqrt{5}$

$0 < -2 + \sqrt{5} < 1$

$\therefore n = 0$

5. 이차방정식 $x^2 - 6x + (a - 1) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 정수가 되도록 하는 자연수 a 값을 모두 더하면?

① 13

② 14

③ 15

④ 16

⑤ 18

해설

$$x^2 - 6x = -a + 1, x^2 - 6x + 9 = -a + 10, (x - 3)^2 = -a + 10$$

$$x - 3 = \pm \sqrt{-a + 10}, x = 3 \pm \sqrt{10 - a}$$

두 근이 정수가 되려면 $10 - a$ 가 제곱수가 되어야 하므로

$$10 - a = 9, 4, 1 \text{ 에서 } a = 1, 6, 9$$

따라서 a 값들의 합은 $1 + 6 + 9 = 16$ 이다.

6. 이차방정식 $3x^2 - 16x - ax + 4a + 15 = 0$ 이 정수의 근을 가질 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 6$

▷ 정답 : $a = 10$

해설

주어진 식을 a 에 관하여 정리하면 $-a(x-4) + 3x^2 - 16x + 15 = 0$ 이다.

$$\begin{aligned} a &= \frac{3x^2 - 16x + 15}{x-4} \\ &= \frac{(x-4)(3x-4) - 1}{x-4} \\ &= 3x - 4 - \frac{1}{x-4} \end{aligned}$$

a 는 정수이므로 $x-4 = \pm 1$ 이다.

$x = 3$ 또는 $x = 5$ 이므로

(i) $x = 3$ 일 때, $a = 6$

(ii) $x = 5$ 일 때, $a = 10$ 이다.

7. 이차방정식 $x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가질 때, a 의 값이 최대가 되도록 b 의 값을 정하려고 한다. 이 때, a 의 값은? (단, a, b 는 두 자리의 자연수)

① 18

② 27

③ 36

④ 45

⑤ 54

해설

$x^2 + ax + 9b = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D = 0, \quad a^2 - 4 \times 9b = 0$$

$$\therefore a^2 = 36b = 6^2b$$

따라서 b 는 제곱수이어야 하고, b 가 최대일 때 a 가 최대가 된다.

두 자리의 자연수 중 가장 큰 제곱수는 81 이므로 $b = 81$ 이다.

$$\therefore a^2 = 6^2 \times 81 = (6 \times 9)^2 = 54^2$$

$$\therefore a = 54 \quad (\because a \text{ 는 자연수})$$

8. 이차방정식 $3x^2 + (a-1)x - a - 2 = 0$ 이 중근을 갖게 하는 a 의 값을 정하고, 중근을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $a = -5$ 일 때, $x = 1$

해설

$$D = (a-1)^2 - 4 \times 3(-a-2) = 0$$

$$a^2 - 2a + 1 + 12a + 24 = 0$$

$$a^2 + 10a + 25 = 0$$

$$(a+5)^2 = 0$$

$$\therefore a = -5$$

$$\text{이 때, } 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$3(x-1)^2 = 0, x = 1$$

9. 방정식 $(2-x-y)^2 - (x^2 + y^2) = 12$ 을 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 $x^2 + y^2$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 109

해설

주어진 식을 전개하여 정리하면, $4 - 4(x+y) + (x+y)^2 - (x^2 + y^2) = 12$,

$$-4(x+y) + 2xy = 8, \quad xy - 2(x+y) = 4, \quad xy - 2(x+y) + 4 = 8, \\ (x-2)(y-2) = 8$$

그런데 x, y 는 정수이므로,

$x-2$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$y-2$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1
x^2+y^2	109	52	52	109	37	4	4	37

따라서 $x^2 + y^2$ 의 최댓값은 109 이다.

10. 이차방정식 $x^2 - (k+2)x + 4k = 0$ 이 두 개의 서로 다른 정수해를 가질 때, k 의 값들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

이차방정식의 두 정수근을 α, β ($\alpha \neq \beta$) 라 하면

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k + 2 \cdots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = 4k \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{1} \times 4 - \textcircled{2}$ 하면

$$4\alpha + 4\beta - \alpha\beta = 8$$

$$(\alpha - 4)(\beta - 4) = 8$$

$\alpha - 4$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$\beta - 4$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1

에서

α	5	6	8	12	3	2	0	-4
β	12	8	6	5	-4	0	2	3
$\alpha\beta$	60	48	48	60	-12	0	0	-12
$\frac{\alpha\beta}{4}$	15	12	12	15	-3	0	0	-3

따라서 k 의 값의 합은 $15 + 12 + (-3) + 0 = 24$ 이다.

11. 다음 식의 값을 구하여라.

$$3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + \cdots}}}$$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

주어진 식을 x 라 하면

$$x = 3 + 2\sqrt{x}, \sqrt{x} > 0 \text{ 이므로 } x > 3$$

$x - 3 = 2\sqrt{x}$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2 - 6x + 9 = 4x$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x - 1)(x - 9) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 9$$

$$\therefore x > 3 \text{ 이므로 } x = 9$$

12. 연속하는 3개의 양의 홀수를 제공하여 더한 것이 251 일 때, 이 연속하는 세 홀수를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 11

해설

연속하는 세 홀수를 $x-2$, x , $x+2$ 라고 하면,

$$(x-2)^2 + x^2 + (x+2)^2 = 251$$

$3x^2 + 8 = 251, x = \pm 9, x > 0$ 이므로 $x = 9$ 이다.

$\therefore$ 연속하는 세 홀수 : 7, 9, 11