1.

반지름이 7 cm인 원 안에 가장 큰 마름모를 그린 것입니다. 마름모의 넓이는 몇 cm^2입니까?

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

2. 두 함수 $(a^2-3a+2)y^2+2y-4x^2-1=0$과 $y=(2a^2-8)x^2-3x+1$이 모두 y 가 x 에 관한 이차함수가 되도록 상수 a 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

i) $(a^2-3a+2)y^2+2y-4x^2-1=0$이 x 에 관한 이차함수가 되기 위해서는 $a^2-3a+2=0$ 이어야 하므로 $(a-1)(a-2)=0$
$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

ii) $y=(2a^2-8)x^2-3x+1$이 x에 관한 이차함수가 되기 위해서는 $2a^2-8 \neq 0$ 이어야 하므로 $a \neq \pm 2$

i), ii)에 의하여 $a=1$ 이다.

3. 이차함수 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ 에 대하여 $f(0) - f(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$f(0) = 2 \times 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$

$f(1) = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 0$

$\therefore\ 1 - 0 = 1$

4. 이차함수 $y = 5x^2$ 의 그래프는 점 $(2,\ a)$를 지나고, 이차함수 $y = bx^2$ 과 x축에 대하여 대칭이다. 이 때, $a + b$의 값은?

① 0 ② 5 ③ 10 ④ 15 ⑤ 20

해설

(1) $y = 5x^2$ 이 $(2,\ a)$를 지나므로,
$a = 5 \times 2^2 = 20$
(2) $y = 5x^2$ 과 x축에 대칭인 그래프는
$y = -5x^2$ 이므로, $b = -5$
$\therefore a + b = 20 - 5 = 15$

5. 원점을 꼭짓점으로 하고 점 $(1,\ -3)$ 을 지나는 이차함수가 점 $(-2,\ m)$ 을 지날 때, 상수 m 의 값은?

① -6 ② -8 ③ -10 ④ -12 ⑤ -14

해설

원점을 꼭짓점으로 하는 이차함수의 식은 $y = ax^2$ 이고, 점 $(1,\ -3)$ 을 지나므로

$-3 = a \times 1^2$, $a = -3$ $\therefore y = -3x^2$

점 $(-2,\ m)$ 을 지나므로 $m = -3 \times (-2)^2 = -12$ $\therefore m = -12$

6. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프는 점 $(a,\ 12)$ 를 지나고, 이차함수 $y = bx^2$ 과 x 축에 대하여 대칭이다. 이 때, ab 의 값은?

① ± 2 ② ± 3 ③ ± 5 ④ ± 6 ⑤ ± 7

해설

$y = 3x^2$ 에 $(a,\ 12)$ 를 대입하면 $a = \pm 2$ 이다.
x 축과 대칭인 함수는 x^2 의 계수의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대이므로 $b = -3$ 이다.
$\therefore ab = \pm 6$

7. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프보다 폭이 좁고, $y = 2x^2$ 의 그래프보다 폭이 넓다고 할 때, a 의 값으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $-\frac{3}{4}$ ② -1 ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

$|a| > \left|-\frac{1}{2}\right|$

$|a| < |2|$

$\therefore -2 < a < -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < a < 2$

8. 다음 중 그래프가 아래로 볼록인 것을 모두 찾으면?

① $y = 2x^2$ ② $y = \frac{1}{3}x^2$ ③ $y = -4x^2$

④ $y = \frac{2}{3}x^2$ ⑤ $y = -\frac{3}{4}x^2$

해설

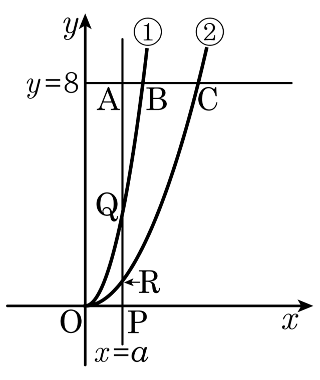
$y = ax^2$ 에서 $a > 0$이면 아래로 볼록이다.

① $y = 2x^2$ 에서 $2 > 0$이므로 아래로 볼록이다.

② $y = \frac{1}{3}x^2$ 에서 $\frac{1}{3} > 0$이므로 아래로 볼록이다.

④ $y = \frac{2}{3}x^2$ 에서 $\frac{2}{3} > 0$이므로 아래로 볼록이다.

9. 다음 그림은 이차함수 $y = 2x^2(x \geq 0) \cdots ①$, $y = \frac{1}{2}x^2(x \geq 0) \cdots ②$ 의 그래프이다. 직선 $y = 8$이 y축 및 곡선 ①, ② 와 점 A, B, C에서 만나고 $x = a$가 x축 및 곡선 ①, ② 와 점 P, Q, R에서 만날 때, 원점과 점 C를 지나는 직선이 곡선 ①과 만나는 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하자. 이 때 $p + q$의 값을 구하여라. (단, 원점은 제외)



▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$\overline{\mathrm{OC}}$의 식은 $y = 2x$

$2x^2 = 2x, x^2 - x = 0, x(x-1) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 1$

$\therefore (p, q) = (1,\ 2)(\because x \neq 0)$

$\therefore p + q = 1 + 2 = 3$

10. $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하면 점 $(2,\ 7)$을 지난다. 이 때, q 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동하면 $y = \frac{1}{2}x^2 + q$ 이다.

$(2,\ 7)$을 대입하면 $7 = 2 + q$ 이므로 $q = 5$ 이다.

11. 이차함수 $y=-3(x+1)^2$ 의 그래프에 대한 설명 중 옳은 것은?

① $y=-3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 포물선이다.
② 꼭짓점의 좌표는 $(0,\ -1)$ 이다.
③ 점 $(2,\ 27)$ 을 지난다.
④ $x>-1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.
⑤ 축의 방정식은 $x=1$ 이다.

해설

① $y=-3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 포물선이다.
② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이다.
③ 점 $(2,\ -27)$ 을 지난다.
⑤ 축의 방정식은 $x=-1$ 이다.

12. 이차함수 $y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 점 $(1,\ k)$ 를 지난다고 한다. k 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 12 ⑤ 27

해설

$y = 3x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동 한 함수의 식은

$y = 3(x+2)^2$ 이고, 점 $(1,\ k)$ 를 지나므로

$k = 3(1+2)^2$

$\therefore\ k = 27$

13. 이차함수 $y=-\frac{3}{2}x^2-1$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동시켰더니 점 $(4,\ k)$ 를 지났다. 이때, k 의 값을 구하면? (단, $k>0$)

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

$y=-\frac{3}{2}x^2-1$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동시킨 함수의 식은 $y=-\frac{3}{2}x^2+4$ 이고, 점 $(4,\ k)$ 를 지나므로 $k=-\frac{3}{2}\times 4^2+4,\ k=-20$ 이다.

14. 이차함수 $y = 2(x+p)^2 + \frac{1}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼 평행이동하면 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ a)$ 이고, 점 $\left(-\frac{1}{2},\ b\right)$ 를 지난다. 이 때, 상수 $a,\ b,\ p$ 의 곱 abp 의 값은?

① $\frac{11}{3}$ ② 13 ③ $-\frac{11}{3}$ ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $-\frac{13}{2}$

해설

$y = 2(x+p-1)^2 + \frac{1}{2}$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $\left(1-p,\ \frac{1}{2}\right)$ 이므로 $1-p=2,\ p=-1,\ \ a=\frac{1}{2}$ 이다.

$y = 2(x-2)^2 + \frac{1}{2}$ 의 좌표가 점 $\left(-\frac{1}{2},\ b\right)$ 를 지나므로 $b = 2\left(-\frac{1}{2}-2\right)^2 + \frac{1}{2},\ \ b=13$ 이다.

$\therefore\ abp = \frac{1}{2} \times 13 \times (-1) = -\frac{13}{2}$

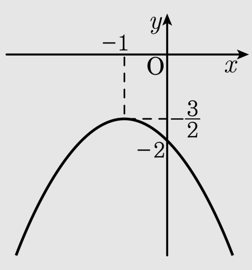
15. 이차함수 $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{3}{2}$의 그래프에서 x의 값이 증가할 때, y의 값도 증가하는 x값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x<-1$

해설

그래프를 그려보면 다음과 같다. 따라서 x의 값의 범위는 $x<-1$이다.



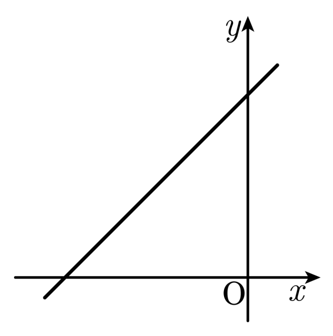
16. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 이차함수는?

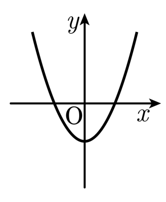
① $y = -x^2$ ② $y = -\frac{1}{2}x^2$ ③ $y = -2x^2$
④ $y = \frac{1}{2}x^2$ ⑤ $y = x^2$

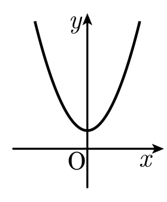
해설

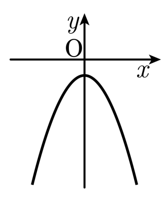
$y = 2x^2$ 의 y 대신에 $-y$ 를 대입하면
$y = -2x^2$ 이다.

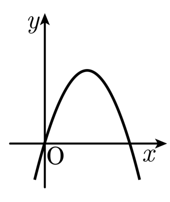
17. 다음 그림은 $y = ax + b$ 의 그래프이다. 이 때, 이차함수 $y = ax^2 + b$ 의 그래프의 모양은?

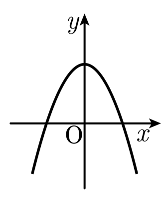


①


②


③


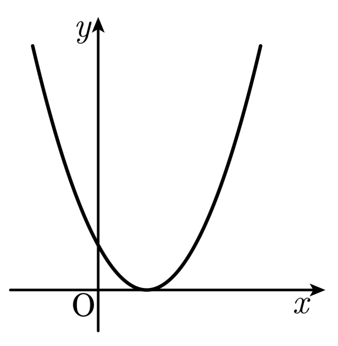
④


⑤


해설

일차함수 $y = ax + b$ 의 기울기는 양수이고, y 절편도 양수이므로 $a > 0$, $b > 0$ 이다.
따라서 $y = ax^2 + b$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 y 절편이 양수인 그래프이다.

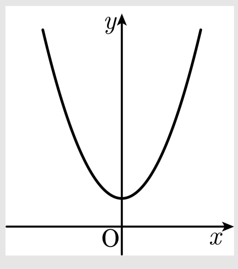
18. 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 이차함수 $y=p(x-q)^2+a$ 의 그래프가 지나는 사분면을 모두 고르면?



① 제1, 2 사분면
② 제3, 4 사분면
③ 제1, 2, 4 사분면
④ 제2, 3, 4 사분면
⑤ 제1, 2, 3, 4 사분면

해설

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 는 아래로 볼록하고, 꼭짓점 (p,q) 가 x 축 위에 있으므로 $a>0,\ p>0,\ q=0$ 이다.
$y=p(x-q)^2+a$ 의 그래프는 아래 그래프와 같다.
따라서 이차함수 $y=p(x-q)^2+a$ 의 그래프가 지나는 사분면은 제1, 2 사분면이다.



19. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 5$과 $y = a(x-1)^2 + b$의 그래프가 서로의 꼭짓점을 지날 때, a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = -1$

▷ 정답: $b = 2$

해설

$y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$의 꼭짓점은 $(2,\ 1)$
$y = a(x-1)^2 + b$의 꼭짓점은 $(1,\ b)$
$(1,\ b)$를 $y = x^2 - 4x + 5$에 대입하면 $b = 2$
$(2,\ 1)$을 $y = a(x-1)^2 + b$에 대입하면 $a = -1$
$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

20. 이차함수 $y=x^2+2ax+4$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, b)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y=x^2+2ax+4=(x+a)^2-a^2+4$
꼭짓점의 좌표가 $(1, b)$ 이므로
$-a=1, -a^2+4=b$ 이다.
$a=-1, b=3$
$\therefore a+b=2$

21. 이차함수 $y = (x-1)(x-p^2)$ $(p > 0)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 두 점, y 축과 만나는 한 점을 연결한 삼각형의 외심 O 의 x 좌표가 6 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\sqrt{11}$

해설

x 축과 만나는 두 점은 $(1,\ 0)$, $(p^2,\ 0)$ 이고
y 축과 만나는 점은 $(0,\ p^2)$
외심 O 의 x 좌표가 6 이므로 $\frac{p^2+1}{2} = 6$
$\therefore\ p = \pm\sqrt{11}$
따라서 $p > 0$ 이므로 $p = \sqrt{11}$ 이다.

22. 이차함수 $y = 2x^2 - 12x + 10 + k$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동 시켰을 때, x 축과 만나지 않는 k 값의 범위가 $k > a$ 이다. a 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

이차함수의 식을 정리하면
$y = 2(x^2 - 6x + 9) - 18 + 10 + k = 2(x-3)^2 - 8 + k$ 이므로
평행이동한 그래프의 식은 $y = 2(x-4)^2 - 5 + k$ 이다.
이 그래프가 x 축과 만나지 않으려면
최솟값 $-5 + k$ 가 0 보다 커야 하므로 $k > 5$
따라서 $a = 5$ 이다.

23. 두 이차함수 $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^2 - 2$ 에 대하여 $h(x) = \dfrac{g(x+1)}{f(x)}$ 이라고 할 때, $h(1)h(2)h(3)\cdots h(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{511}$

해설

$f(x) = (x+2)^2 - 2, g(x) = x^2 - 2$ 이므로

$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면

$y = g(x)$ 의 그래프가 되므로

$\therefore\ g(x) = f(x-2)$

$\therefore h(1)h(2)h(3)\cdots h(30)$

$= \dfrac{g(2)g(3)g(4)\cdots g(31)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(30)}$

$= \dfrac{f(0)f(1)f(2)\cdots f(29)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(30)}$

$= \dfrac{f(0)}{f(30)} = \dfrac{2}{1022} = \dfrac{1}{511}$

24. 다음 이차함수의 그래프 중 4 번째로 폭이 좁은 것은?

① $y=-(x-2)^2$ ② $y=\dfrac{2x(x-1)(x+1)}{x-1}$
③ $y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{3}$ ④ $y=-3x^2+x$
⑤ $y=-\dfrac{5}{2}x^2$

해설

a 의 절댓값이 클수록 폭이 좁아진다.
a 의 절댓값을 각각 구하면
① 1
② 2
③ $\dfrac{1}{3}$
④ 3
⑤ $\dfrac{5}{2}$
이므로 폭이 좁은 순서는 ④, ⑤, ②, ①, ③이다. 따라서 네 번째로 폭이 좁은 것은 ①이다.

25. 이차함수 $y = -x^2 - 2x + 1$ 에서 x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값이 감소하는 x 의 값의 범위는?

① $x < -1$ ② $x > -1$ ③ $x < 1$

④ $x > 1$ ⑤ $x > 0$

해설

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - 2x + 1 \\ &= -(x^2 + 2x + 1 - 1) + 1 \\ &= -(x+1)^2 + 2 \end{aligned}$$

대칭축이 $x = -1$ 이고 위로 볼록한 포물선이다.

26. 이차함수 $y=-3x^2-6x+2$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (a,b) 이고, y 축과의 교점의 y 좌표가 q 일 때, $\frac{a+b}{q}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y=-3x^2-6x+2$ 의 식을 $y=a(x+p)^2+q$ 의 꼴로 바꾸면
$y=-3(x^2+2x+1-1)+2$
$y=-3(x+1)^2+5$ 이므로
i) 꼭짓점의 좌표는 $(-1,5)$ $\therefore a=-1, b=5$
ii) y 축과 만나는 점의 x 좌표는 0 이므로 $x=0$ 을 대입하면
$q=2$
따라서 $\frac{a+b}{q}=\frac{(-1)+5}{2}=\frac{4}{2}=2$ 이다.

27. 아래 이차함수 식 가운데 x 축과 교점이 한 개인 것은?

① $y = x^2 - x + 3$ ② $y = x^2 + x - 2$

③ $y = x^2 + 1$ ④ $y = x^2 - 3x + 4$

⑤ $y = 4x^2 - 4x + 1$

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 와 x 축과의 교점의 개수

$b^2 - 4ac > 0$: 2 개

$b^2 - 4ac = 0$: 1 개

$b^2 - 4ac < 0$: 0 개

⑤ $(-4)^2 - 4 \times 4 = 0$

따라서 x 축과 한 점에서 만난다.

28. $y=\frac{1}{2}x^2-x+1$ 이 지나는 사분면은?

① 제 1, 2 사분면
② 제 3, 4 사분면
③ 제 1, 2, 3 사분면
④ 제 1, 2, 4 사분면
⑤ 제 1, 2, 3, 4 사분면

해설

꼭짓점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ 이 제 1 사분면에 있고, y 절편이 1 인, 아래로 볼록한 그래프이다.
따라서 제1, 2 사분면을 지난다.

29. 포물선 $y = x^2 + ax + a - 1$ 이 x 축과 만나는 두 점의 사이의 거리가 2 일 때, a 의 값들의 합을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$y = x^2 + ax + a - 1$ 의

x 절편을 α, β $(\alpha > \beta)$ 라고 하면

$\alpha + \beta = -a$, $\alpha\beta = a - 1$ 이다.

$\alpha - \beta = 2$ 이므로

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$4 = a^2 - 4a + 4$

$a^2 - 4a = 0$

$a(a - 4) = 0$

$\therefore$ $a = 0$ 또는 $a = 4$

따라서 a 의 값의 합은 4 이다.

30. 이차함수 $y=-(x-3)^2+4$ 의 그래프에서 꼭짓점을 A, x 축과 만나는 두 점을 각각 B, C 라고 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

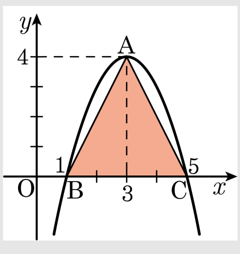
해설

$y=-(x-3)^2+4$ 의 그래프에서 꼭짓점은 $(3,\ 4)$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= -(x-3)^2+4 \\ &= -(x^2-6x+9)+4 \\ &= -(x^2-6x+5) \\ &= -(x-1)(x-5) \end{aligned}$$

따라서 x 축과의 교점은 $(1,\ 0)$, $(5,\ 0)$ 이다

$\therefore$ $\triangle$ABC의 넓이 $=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$



31. 이차함수 $y = x^2 - 2kx + k^2 - 10$ 의 그래프의 꼭짓점을 A, y 절편을 B, x 절편을 각각 C, D 라 할 때, 사각형 ABCD 의 넓이가 42가 되는 모든 k의 값의 합을 구하여라. (단, $0 < k < \sqrt{10}$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{10}$

해설

$y = x^2 - 2kx + k^2 - 10 = (x-k)^2 - 10$

$\therefore\ \mathrm{A}(k,\ -10),\ \mathrm{B}(0,\ k^2 - 10)$

$x^2 - 2kx + k^2 - 10 = 0$ 에서 $x = k \pm \sqrt{10}$

$\therefore\ \mathrm{C}(k - \sqrt{10},\ 0),\ \mathrm{D}(k + \sqrt{10},\ 0)$

원점을 O 라 하면 $k > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ \square\mathrm{ABCD} &= \triangle\mathrm{OBC} + \triangle\mathrm{ABO} + \triangle\mathrm{AOD} \\ &= \frac{1}{2} \times (-k + \sqrt{10})(-k^2 + 10) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (-k^2 + 10) \times k \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (k + \sqrt{10}) \times 10 = 42\end{aligned}$$

이 식을 정리하면 $-\sqrt{10}k^2 + 10k + 20\sqrt{10} - 84 = 0$

따라서 k 의 모든 값의 합은 $\sqrt{10}$ 이다.

32. 이차함수 $y = -2x^2 - ax + 7$ 의 그래프가 점 $(1,\ 1)$ 을 지날 때의 설명으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① 직선 $x = -1$ 을 축으로 한다.

② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 7)$ 이다.

③ $y = -2x^2 + 4x + 7$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

④ x 축과 두 점에서 만난다.

⑤ y 축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 7)$ 이다.

해설

$y = -2x^2 - ax + 7$ 의 그래프가 점 $(1,\ 1)$ 을 지나므로 $x = 1,\ y = 1$ 을 대입하면,

$-2 - a + 7 = 1 \therefore\ a = 4$

따라서 포물선의 식은 $y = -2x^2 - 4x + 7 = -2(x+1)^2 + 9$

① 축의 식은 $x = -1$

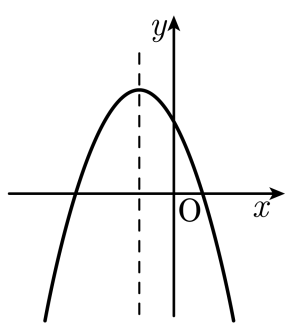
② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 9)$

③ y 축에 대칭인 그래프는 x 대신 $-x$ 를 대입하면 $y = -2x^2 + 4x + 7$

④ 그래프의 개형(대략적인 모양)을 그려보면 x 축과 두 점에서 만난다.

⑤ y 절편은 7 이고 y 축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 7)$

33. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = cx^2 + ax + b$ 의 그래프의 꼭짓점은 제 몇 사분면에 있는가?



① 제1 사분면　② 제2 사분면　③ 제3 사분면
④ 제4 사분면　⑤ 답이 없다.

해설

$a < 0,\ c > 0,\ -\dfrac{b}{2a} < 0$ 에서 $b < 0 \therefore\ a < 0,\ b < 0,\ c > 0$

$y = cx^2 + ax + b$ 에서

(1)$c > 0$ 이므로 아래로 볼록

(2) 꼭짓점의 x 좌표를 구하면

$$y = c\left(x^2 + \frac{a}{c}x + \frac{a^2}{4c^2} - \frac{a^2}{4c^2}\right) + b$$
$$= c\left(x + \frac{a}{2c}\right)^2 - \frac{a^2}{4c} + b \text{이므로}$$

축 : $-\dfrac{a}{2c} > 0$

(3)y 절편 : $b < 0$

따라서, 그래프는 다음 그림과 같으므로 꼭짓점은 제4사분면에 있다.