1. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때,$xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$ ② $-1 - 2i$ ③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$ ⑤ $-1 + i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned}\therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i}\\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i}\\ &= \frac{2+4i}{1-i}\\ &= -1+3i\end{aligned}$$

2. x에 대한 이차방정식$(m-1)x^2-2mx+(m+2)=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값과 그 때의 중근을 α라 할 때, $m+\alpha$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

주어진 방정식이 이차방정식이므로 $m \neq 1$ 이고, x의 계수가 $2m$ 이므로

$\frac{D}{4}=m^2-(m-1)(m+2)=0$

정리하면, $-m+2=0 \quad \therefore \ m=2$

$m=2$ 를 준식에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore \ x=2$ (중근 α)

$\therefore m+\alpha=2+2=4$

3. 이차함수 $y = -2x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼 y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동시켰을 때, 최댓값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2(x+3)^2 + 4$
따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값은 4 이다.

4. 함수 $y = -x^2 - 2x + 5$ ($-2 \le x \le 2$) 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 을 구하여라.

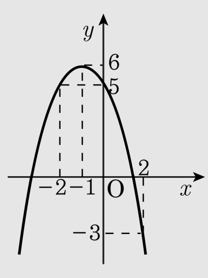
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = -x^2 - 2x + 5 = -\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 5 = -(x + 1)^2 + 6$

점$(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2) = 5, f(2) = -3$

따라서 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $f(-1) = 6$ 이며

최솟값은 $x = 2$ 일 때 $f(2) = -3$ 이다.

$\therefore\ M + m = 6 - 3 = 3$

5. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots$ ㉠
$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$
$\therefore \ ab=2$

6. 0이 아닌 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립할 때, $|a| + |b| - |a-b|$ 를 간단히 하면?

① $2a$ ② $-2b$ ③ 0 ④ $-2a$ ⑤ $2b$

해설

$a \geq 0,\ b < 0$

$|a| + |b| - |a-b| = a - b - (a-b) = 0$

7. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x - 2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

8. 지면으로부터 60m 되는 높이에서 초속 60m 로 곧바로 위로 쏘아 올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 대략 $y = -5x^2 + 60x + 60$ 인 관계가 성립한다. 그 물체의 높이가 최대가 되는 것은 쏘아 올린 지 몇 초 후인가? 또한, 그 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: 초

▶ 답: m

▷ 정답: 6초

▷ 정답: 240m

해설

$y = -5x^2 + 60x + 60 = -5(x-6)^2 + 240$
따라서 $x = 6$ 일 때, 최댓값 240을 갖는다.

9. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$　　② $x^4 + x^2 - 2 = 0$

③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$　　④ $x^4 - 16 = 0$

⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다

① $(x-2)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow$ 실근 1개, 허근 2개

② $(x^2-1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

③ $(x-3)(x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow$ 실근 3개

④ $(x^2+4)(x^2-4) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

⑤ $x = \frac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2개

10. 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$\alpha+\beta+\gamma=3,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \ \alpha\beta\gamma=-1$이므로
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=3^2-2\cdot(2)=$
$9-4=5$

11. a, b가 실수일 때, 방정식 $x^3+ax^2-4x+b=0$ 의 한 근이 $1+i$ 이면 $a+b$의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-a$

$\therefore\ 2+\alpha=-a\cdots$①

$(1+i)(1-i)+(1-i)\alpha+(1+i)\alpha=-4$

$\therefore\ 2+2\alpha=-4\cdots$②

$(1+i)(1-i)\alpha=-b$

$\therefore\ 2\alpha=-b\cdots$③

①, ②, ③에서 $\alpha=-3,\ a=1,\ b=6$

$\therefore\ a+b=7$

12. $x^2+x+1=0$일 때, $x^{100}+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^{100}}$의 값은?

① 1　② -2　③ 0　④ -1　⑤ 2

해설

$x^2+x+1=0$에서

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x^3=1$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x\cdot x^{99}+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x\cdot x^{99}}\\ &= x+x^2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\\ &= -1+\frac{x+1}{x^2}\,(\because x^2+x=-1)\\ &= -1+\frac{-x^2}{x^2}\ (\because x+1=-x^2)\\ &= -2\end{aligned}$$

13. 다음 연립방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x + y = u$, $xy = v$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 25 \\ v = 12 \end{cases}$$

$\therefore\ u = \pm 7,\ v = 12$

따라서, 주어진 연립방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{cases} x + y = 7 & \cdots ㉢ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

또는 $\begin{cases} x + y = -7 & \cdots ㉣ \\ xy = 12 & \cdots ㉡ \end{cases}$

(i) ㉢, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 - 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = 3,\ y = 4$ 또는 $x = 4,\ y = 3$

(ii) ㉣, ㉡에서 $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2 + 7t + 12 = 0$ 의 두 근이므로 $x = -3,\ y = -4$ 또는 $x = -4,\ y = -3$

(i), (ii)로부터 구하는 모든 해의 합은 0

14. 방정식 $2x+5y=84$를 만족하는 양의 정수 x, y의 해 중에서 x의 최댓값을 구하면?

① 36　② 37　③ 38　④ 39　⑤ 40

해설

준식을 y에 대하여 정리하면

$y=\frac{84-2x}{5}=\frac{2(42-x)}{5}$ ⋯⋯㉠

㉠에서 y가 양의 정수이므로 $42-x$가 5의 배수이다.

따라서, $x=2, 7, \cdots, 37$

$\therefore$ x의 최댓값은 37

15. $z^2 = \sqrt{5} + i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 $z\bar{z}$ 의 값은? (단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① $\sqrt{2}$　② $\sqrt{3}$　③ 2　④ $\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{6}$

해설

$z = x + yi$ ($x,\ y$ 는 실수)로 놓으면 $(x+yi)^2 = \sqrt{5} + i$
$x^2 - y^2 + 2xyi = \sqrt{5} + i$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$x^2 - y^2 = \sqrt{5},\ 2xy = 1$
$z\bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 + y^2$ 이므로
$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = (\sqrt{5})^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6$$
$x^2 + y^2 > 0$ 이므로 $x^2 + y^2 = \sqrt{6}$
$\therefore\ z\bar{z} = \sqrt{6}$

해설

$z^2 = \sqrt{5} + i$, $\overline{z^2} = \sqrt{5} - i$
$z^2\overline{z^2} = (\sqrt{5}+i)(\sqrt{5}-i) = 6$
$z\bar{z} = \pm\sqrt{6}$
$z\bar{z} \geq 0$ 이므로 $z\bar{z} = \sqrt{6}$

16. $\dfrac{\overline{z}+1}{z}+\dfrac{z-1}{\overline{z}}=i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

① ± 1　② $\pm 2i$　③ ± 2　④ $\pm i$　⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a+bi \\ z = a-bi \end{cases}$$

$$\frac{\overline{z}+1}{z}+\frac{z-1}{\overline{z}}=i$$

$$\frac{\overline{z}^2+\overline{z}+z^2-z}{z\overline{z}}=i$$

$$\frac{a^2-2abi-b^2+a-bi+a^2+2abi-b^2-a-bi}{a^2+b^2}$$

$=i$

$$\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{-2b}{a^2+b^2}i=i$$

$a^2=b^2,\ \dfrac{-2b}{a^2+b^2}=+1$

$\therefore\ a=\pm 1, b=-1$

$z=\pm 1-i$, $z^2=\pm 2i$

17. $w = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$ 일 때, $(w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$w = \frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore\ w^2+w+1=0,\quad w^3=1$

$$\begin{aligned}\therefore\ & (w+2w^2)^2+(2w+w^2)^2 \\ &= (w-2w-2)^2+(2w-w-1)^2 \\ &= (-w-2)^2+(w-1)^2 \\ &= w^2+4w+4+w^2-2w+1 \\ &= 2w^2+2w+5 \\ &= 2(w^2+w+1)+3 \\ &= 3\end{aligned}$$

18. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4　② 2　③ -1　④ 5　⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

19. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=3,\ f(\beta)=3,\ f(1)=-2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x)=0$를 구하면?

① $x^2-2x-4=0$　　② $x^2-4x-1=0$

③ $x^2-x-4=0$　　④ $x^2-x+4=0$

⑤ $x^2-2x-1=0$

해설

$x^2-2x-4=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이고

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$ax^2+bx+c=3$에서 $ax^2+bx+c-3=0$

$\therefore -\dfrac{b}{a}=\alpha+\beta=2$

또, $\dfrac{c-3}{a}=\alpha\beta=-4$

$f(1)=a+b+c=-2$이므로

$a=-b-c-2,\ b=-2a$에서

$b=-2(-b-c-2)=2b+2c+4$

$\therefore b+2c+4=0$

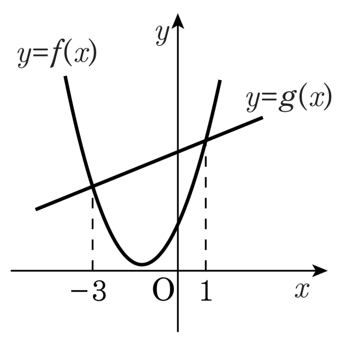
$c-3=-4a$에서

$c=-4(-b-c-2)+3=4b+4c+11$

연립하여 풀면 $c=-1,\ b=-2,\ a=1$

$\therefore f(x)=x^2-2x-1$

20. 아래 그림과 같이 두 함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 4$, $g(x) = cx + d$ 의 그래프가 $x = 1$ 과 $x = -3$ 에서 만난다. 이 때, 함수 $y = f(x) - g(x)$ 의 최솟값은?



① -8 ② -6 ③ -4 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 함수를 연립하면,

$2x^2 + ax + 4 = cx + d$

$\Rightarrow 2x^2 + (a-c)x + 4 - d = 0 \cdots$ ㉠

근이 $-3, 1$이므로

$2(x+3)(x-1) = 0$과 일치한다.

㉠과 비교하면 $a - c = 4, d = 10$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) - g(x) &= 2x^2 + (a-c)x + 4 - d \\ &= 2x^2 + 4x - 6 \\ &= 2(x+1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$\therefore$ 최솟값 : -8

21. 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 두 근을 α, β라 한다. $S_n=\alpha^n+\beta^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 할 때, $S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n=$㈎, $S_4+S_3+S_2=$㈏이다. 이 때, ㈎, ㈏에 알맞은 수를 차례로 쓰면?

① 0, 1　② 0, 2　③ 0, 3　④ 1, 1　⑤ 1, 2

해설

$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=2$

$S_{n+2}+S_{n+1}+2S_n$

$=(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2})+(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})+2(\alpha^n+\beta^n)$

$=\alpha^n(\alpha^2+\alpha+2)+\beta^n(\beta^2+\beta+2)=0$

$(\because \alpha^2+\alpha+2=0,\ \beta^2+\beta+2=0)$

$n=2$를 대입하면 $S_4+S_3+2S_2=0$

$$\begin{aligned}\therefore\ S_4+S_3+S_2 &= -S_2\\ &= -(\alpha^2+\beta^2)\\ &= -\left\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right\}\\ &= -(1-4)=3\end{aligned}$$

22. 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$과 $x^2 + 2bx + a = 0$의 두 근의 차가 서로 같을 때, a, b의 관계식은?

① $a + b = 0$　② $a - b - 1 = 0$　③ $a - b + 1 = 0$
④ $a + b - 1 = 0$　⑤ $a + b + 1 = 0$

해설

$x^2 + 2ax + b = 0$의 해를 α, β
$x^2 + 2bx + a = 0$의 해를 γ, δ라 하면
$|\alpha - \beta| = |\gamma - \delta|$에서
$(\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2$,
$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta$
$(-2a)^2 - 4b = (-2b)^2 - 4a$
$\therefore\ (a - b)(a + b + 1) = 0$
$a \neq b$이므로 $a + b + 1 = 0$

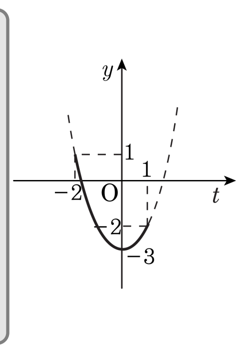
23. $f(x) = |2x-3|-2,\ g(x) = x^2-3$ 일 때, $0 \le x \le 2$ 에서 $(g \circ f)(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

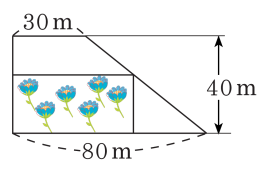
▷ 정답 : -2

해설

$f(x) = t$ 로 놓으면,
$-2 \le t \le 1$
$(g \circ f)(x) = g(t) = t^2 - 3$
따라서 최댓값은 1 ,
최솟값은 -3
$\therefore\ M = 1, m = -3$
$\therefore\ M + m = -2$

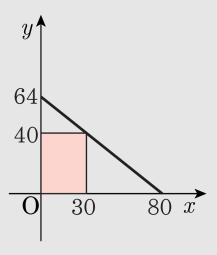


24. 아래 그림과 같은 사다리꼴 모양의 토지 안에 직사각형 모양의 꽃밭을 가능한 한 넓게 만들려고 한다. 이 꽃밭의 넓이의 최댓값은? (단, 넓이의 단위는 m^2)



① $1240\,m^2$　② $1260\,m^2$　③ $1280\,m^2$
④ $1300\,m^2$　⑤ $1320\,m^2$

해설



$80 : 30 = 40 + k : k$ 이므로 $k = 24$
따라서 y 절편은 64 가 된다.

빗변의 그래프는 $y = -\frac{4}{5}x + 64$ 이므로

사각형의 넓이는

$$x\left(-\frac{4}{5}x + 64\right) = -\frac{4}{5}x^2 + 64x$$
$$= -\frac{4}{5}(x - 40)^2 + 1280$$

즉, 밑변의 길이가 40 m 일때 직사각형 넓이의 최댓값 $1280\,m^2$ 이 된다.

25. 철수는 모든 모서리의 길이의 총합이 $40\,\mathrm{cm}$, 겉넓이는 $62\,\mathrm{cm}^2$, 부피가 $30\,\mathrm{cm}^3$ 인 직육면체 모양의 상자를 만들려고 한다. 이 때, 이 상자의 가장 긴 모서리의 길이는 얼마로 해야 하겠는가?

① $3\,\mathrm{cm}$　　② $3.5\,\mathrm{cm}$　　③ $4\,\mathrm{cm}$

④ $4.5\,\mathrm{cm}$　　⑤ $5\,\mathrm{cm}$

해설

각 모서리의 길이를 $x,\ y,\ z$라고 하면
문제의 뜻에서
(ⅰ) $4(x+y+z)=40$
$\therefore\ x+y+z=10$
(ⅱ) $2(xy+yz+zx)=62$
$\therefore\ xy+yz+zx=31$
(ⅲ) $xyz=30$
따라서, $x,\ y,\ z$는 삼차방정식
$t^3-10t^2+31t-30=0$의 세 근이다.
$(t-2)(t-3)(t-5)=0$
$\therefore\ t=2,\ 3,\ 5$
이 중 가장 긴 모서리의 길이는 $5(\mathrm{cm})$이다.