1. 등식 $x^2+2x+3=a(x-1)^2+bx+c$가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $a,\ b,\ c$의 값을 정할 때, $a+b+c$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

우변을 전개하여 동류항으로 묶는다.

$$x^2+2x+3=a(x-1)^2+bx+c$$
$$=ax^2+(b-2a)x+a+c$$

$a=1,\ b-2a=2,\ a+c=3$

$a=1,\ b=4,\ c=2$

$a+b+c=7$

2. $f(x) = 2x^3 - 2x + k$가 $x - 2$로 나누어 떨어질 때, k의 값은?

① 0 ② 1 ③ −8 ④ −10 ⑤ −12

해설

$f(x) = 2x^3 - 2x + k$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지면
나머지정리에 의해 $f(2) = 16 - 4 + k = 0$
$\therefore\ k = -12$

3. $\dfrac{1000^2}{252^2-248^2}$ 은?

① 62500 ② 1000 ③ 500

④ 250 ⑤ $\dfrac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{1000^2}{252^2-248^2} &= \frac{1000\cdot 1000}{(252+248)(252-248)}\\ &= \frac{1000}{500}\cdot\frac{1000}{4}\\ &= 500\end{aligned}$$

4. 직선 $y = -2x + 4$ 에 평행하고, 한 점 $(2, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은?

① $y = \frac{1}{2}x + 1$ ② $y = -2x - \frac{1}{2}$ ③ $y = -2x - 2$

④ $y = -2x + 1$ ⑤ $y = 2x - 1$

해설

두 직선이 평행하므로 기울기가 같고 구하고자 하는 직선의 기울기는 -2

따라서 기울기가 -2 이고, 한 점 $(2, -3)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$y + 3 = -2(x - 2)$

$\therefore\ y = -2x + 1$

5. 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(a,\ b)$ 에 대하여 대칭이동한 점을 구하면?

① $(a-x,\ b-y)$ ② $(2a-x,\ 2b-y)$

③ $(3a-x,\ 3b-y)$ ④ $(4a-x,\ 4b-y)$

⑤ $(5a-x,\ 5b-y)$

해설

점 (x,y) 를 점 (a,b) 에 대하여
대칭이동한 점을 (x',y') 이라고 하면

$\frac{x+x'}{2}=a,\ \frac{y+y'}{2}=b$ 이므로

$x'=2a-x,\ y'=2b-y$

$\therefore (x',\ y')=(2a-x,\ 2b-y)$

6. $i^2 = -1$이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$의 꼴이 되어야 한다.
$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4개,
$2, -\sqrt{2}$는 실수이므로
(실수)$^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$가 된다.

7. x 가 정수일 때, $y = 2x^2 - 3x + 6$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$y = 2x^2 - 3x + 6 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}$

x 가 정수이므로 $x = 1$ 일 때, 최솟값 5 를 갖는다.

8. 이차함수 $y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 $x = -1$ 일 때, 최솟값 4 를 갖는 이차함수의 식은?

① $y = 2(x-1)^2$ ② $y = 2(x-1)^2 + 4$

③ $y = 2(x+1)^2 + 4$ ④ $y = -2(x+1)^2 + 4$

⑤ $y = -2(x-1)^2 + 4$

해설

$y = 2x^2$ 의 그래프와 모양이 같고 꼭짓점이 $(-1, 4)$ 이므로 $y = 2(x+1)^2 + 4$

9. 다음 연립부등식을 만족하는 가장 큰 정수는?

$$\begin{cases} \frac{2}{5}(4x-1) > \frac{1}{3}(2x+3) \\ 0.5(x-9) < 0.2(x-3) \end{cases}$$

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 13

해설

i) $\frac{2}{5}(4x-1) > \frac{1}{3}(2x+3)$ 의 양변에 15 를 곱해 주면,

$\Rightarrow 6(4x-1) > 5(2x+3)$

$\Rightarrow x > \frac{3}{2}$

ii) $0.5(x-9) < 0.2(x-3)$ 의 양변에 10 을 곱해 주면,

$\Rightarrow 5(x-9) < 2(x-3)$

$\Rightarrow x < 13$

$\therefore \frac{3}{2} < x < 13$

10. 이차부등식 $x^2 - 2kx + 2k \le 0$이 해를 갖지 않을 때, 실수 k값의 범위는?

① $-1 \le k \le 0$　② $-2 < k < 0$

③ $0 \le x \le 2$　④ $0 < k < 2$

⑤ $k < 0$, 또는 $k > 2$

해설

주어진 이차부등식이 해를 갖지 않으려면
방정식 $x^2 - 2kx + 2k = 0$이 허근을 가져야 하므로
$\frac{D}{4} = k^2 - 2k < 0,\ \ k(k-2) < 0$
$\therefore 0 < k < 2$

11. x축 위의 점 P로부터 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-2y-2=0$까지의 거리가 같다. 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$이라 할 때 $-ab$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

P의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$이라 하면
P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|2\alpha+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|\alpha-2|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$\therefore |2\alpha+1|=|\alpha-2|$

$\therefore 2\alpha+1=\pm(\alpha-2)$

$\therefore \alpha=\frac{1}{3},\ -3$

$\therefore \left(\frac{1}{3},\ 0\right)$, $(-3,\ 0)$이므로

$-ab=-\frac{1}{3}\times -3=1$

12. 이차방정식 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 이 원을 나타내도록 상수 k 의 값의 범위를 정하면?

① $k < -5$ ② $k > -5$ ③ $-5 < k < 5$

④ $k < \sqrt{5}$ ⑤ $k > -\sqrt{5}$

해설

원 $x^2 + y^2 - 4x - 2y - k = 0$ 을 표준형으로 고치면,
$(x-2)^2 + (y-1)^2 = k + 5$
이 때, $k + 5 > 0$ 이어야 하므로 $k > -5$

13. 다항식 $f(x) = x^3 - 3x^2 + kx - 6$이 일차식 $x - 2$로 나누어떨어질 때, $f(x)$를 $x - 1$로 나눈 나머지는?

① -3 ② -1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = (x-2)\,Q(x)$
즉, $f(2) = 8 - 12 + 2k - 6 = 0$
$\therefore\ k = 5$
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$
$\therefore\ f(1) = -3$

14. $x^4 - 8x^2 - 9$를 x에 대한 일차식만의 곱으로 인수분해할 때, 계수는 다음 중 어떤 수라 할 수 있는가?

① 정수　② 유리수　③ 무리수
④ 실수　⑤ 복소수

해설

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^2 - 9 &= (x^2 - 9)(x^2 + 1) \\ &= (x + 3)(x - 3)(x^2 + 1) \\ &= (x + 3)(x - 3)(x + i)(x - i) \end{aligned}$$

$\therefore$ 복소수

15. 합이 30 인 두 수가 있다. 두 수의 곱이 최대가 되는 두 수를 각각 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 15

▷ 정답: 15

해설

두 수를 각각 x , $30 - x$ 라고 하면,

$y = x(30 - x)$

$= -x^2 + 30x$

$= -(x - 15)^2 + 225$

$x = 15$ 일 때, 최댓값 225 를 가지므로 $30 - x = 15$ 이다.

16. 연립부등식 $3x - a < 2x + 1 \leq \dfrac{10x + b}{3}$ 의 해가 $-1 \leq x < 9$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 15 ② 13 ③ 11 ④ 9 ⑤ 7

해설

i) $3x - a < 2x + 1$

$x < 1 + a$

ii) $2x + 1 \leq \dfrac{10x + b}{3}$

양변에 3 을 곱하면

$6x + 3 \leq 10x + b$

$x \geq \dfrac{3 - b}{4}$

부등식의 해 $\dfrac{3 - b}{4} \leq x < a + 1$ 과 $-1 \leq x < 9$ 가 같아야 하므로

$\dfrac{3 - b}{4} = -1, \quad b = 7$

$a + 1 = 9, \quad a = 8$

$\therefore \ a + b = 15$

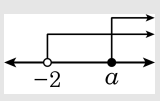
17. 연립부등식 $\begin{cases} x < -2 \\ x \geq a \end{cases}$ 의 해집합이 공집합일 때, a 의 값이 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

공집합이므로 $a \geq -2$ 이다.
따라서 가장 작은 정수는 -2 이다.



18. 다음 부등식을 풀어라.

$\lvert x-1\rvert > \lvert x-2\rvert$

▶ 답 :

▷ 정답 : $x > \frac{3}{2}$

해설

i) $x < 1$ 일 때,
$-(x-1) > -(x-2)$ 에서 $1 > 2$ 이므로 모순

ii) $1 \le x < 2$ 일 때,
$(x-1) > -(x-2)$ 에서

$2x > 3,\ x > \frac{3}{2}$

조건에서 $1 \le x < 2$ 이므로 $\frac{3}{2} < x < 2 \cdots$ ㉠

iii) $x \ge 2$ 일 때, $(x-1) > (x-2)$ 에서 $1 < 2$ 이므로 성립
$\therefore\ x \ge 2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x > \frac{3}{2}$

19. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양수가 되기 위한 a 의 정수값은 얼마인가?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$x^2 + 2(a-5)x + 2(3a-19)$ 가 양수가 되려면
판별식이 $D < 0$ 이이어야 하므로

$\frac{D}{4} = (a-5)^2 - 2(3a-19) < 0$

$a^2 - 10a + 25 - 6a + 38 < 0$, $a^2 - 16a + 63 < 0$

$(a-9)(a-7) < 0$

$\therefore\ 7 < a < 9$

따라서 정수a 의 값은 8 이다.

20. 두 부등식 $|x-a|<2$, $x^2-2x+1-b^2\le 0$을 동시에 만족하는 x의 값이 없도록 하는 양수 a, b의 관계식은?

① $a-b\ge 3$　② $a-b\le 3$　③ $a-b>3$

④ $a-b<3$　⑤ $a-b>-3$

해설

$-2<x-a<2$

$\Rightarrow\quad -2+a<x<2+a$

$x^2-2x+1-b^2\ge 0$

$\Rightarrow \{x-(1+b)\}\{x-(1-b)\}\le 0$

$\Rightarrow\quad 1-b\le x\le 1+b$

두 부등식의 공통범위가 없으려면

$2+a\le 1-b$이거나

$1+b\le -2+a$이어야 한다

$\Rightarrow a+b\le -1$ 또는 $a-b\ge 3$

21. 두 부등식 $x^2 - 4x - 5 < 0$, $x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$을 동시에 만족하는 x의 값이 존재하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

$x^2 - 4x - 5 < 0$에서
$(x-5)(x+1) < 0$이므로
$-1 < x < 5$
$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a < 0$에서
$x^2 - 2(a+1)x + a(a+2)$
$= (x-a)(x-a-2) < 0$이므로
$a < x < a+2$
두 부등식의 공통부분이 있어야 하므로
$a + 2 > -1$
즉 $a > -3$또는 $a < 5$에서
$-3 < a < 5$
따라서 정수 a의 개수는 7개다.

22. 세 점 A(1, 1), B(2, 4), C(a, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{AC} = \overline{BC}$인 이등변삼각형이 되도록 하는 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

삼각형 ABC가 $\overline{AC} = \overline{BC}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AC} = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(2-a)^2 + 4^2}$

$2 - 2a + a^2 = 20 - 4a + a^2$

$2a = 18$

$\therefore\ a = 9$

23. 직선 $3x+4y+a=0$ 이 원 $x^2+y^2=4$ 와 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 정수 a 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 19 개

해설

직선이 원과 서로 다른 두 점에서 만나려면
원의 중심에서 직선까지의 거리(d) 보다
원의 반지름 (r) 이 크다.

$d=\dfrac{|3\times 0+4\times 0+a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{|a|}{5}<2=r$

$\dfrac{|a|}{5}<2$, $|a|<10$, $-10<a<10$

$a=-9,\ -8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$ ∴ 19 개

24. 원 $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시킨 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하면?

① $(-1, -1)$, $2\sqrt{3}$ ② $(0, 0)$, $3\sqrt{3}$ ③ $(1, 1)$, $4\sqrt{3}$
④ $(2, 2)$, $5\sqrt{3}$ ⑤ $(3, 3)$, $6\sqrt{3}$

해설

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$
$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12$
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 12$
이 원의 중심의 좌표는 $(-3, 2)$ 이고
반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
따라서, 이 원을 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동시켰을 때,
중심의 좌표는 $(-3 + 2, 2 - 3) = (-1, -1)$ 이고,
반지름의 길이는 변하지 않으므로 $2\sqrt{3}$ 이다.

25. $f:(x,\ y)\to(-x,\ -y), g:(x,\ y)\to(x+a,\ y+b)$ 에 대하여 $g\circ f$ 가 점 $(1,\ 2)$ 를 점 $(3,\ 4)$ 로 변환시킬 때 $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$g\circ f:(x,y)\to(-x+a,\ -y+b)$

$\therefore\ (g\circ f)(1,\ 2)=g\,(f(1,\ 2))=g(-1,\ -2)$

$=(-1+a,\ -2+b)=(3,\ 4)$

$\therefore\ -1+a=3$ 에서 $a=4,\ -2+b=4$ 에서 $b=6$

$\therefore\ a+b=10$