

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - k$ 가 $x - 2$ 를 인수로 가질 때, k 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어진다는 뜻이다.

즉, $f(2) = 0$ 을 만족시키는 k 를 구하면,

$$f(2) = 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - k = 0$$

$$\therefore k = 6$$

2. 등식 $3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

- ① 3
- ② -4
- ③ 2
- ④ 8
- ⑤ 6

해설

$$3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c$$
$$= (x - 1) \{ a(x - 1) + b \} + c$$

1		3	2	1	
			3	5	
1		3	5	6	← c
			3		
		3	8		← c
		↑			
		a			

해설

$x = 1$ 을 대입하면 $c = 6$
 $3x^2 + 2x + 1 = a(x - 1)^2 + b(x - 1) + 6$
 $\rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = a(x - 1)^2 + b(x - 1)$
 $\rightarrow (x - 1)(3x + 5) = a(x - 1)^2 + b(x - 1)$
 $\rightarrow$ 양변을 $x - 1$ 로 나누면
 $3x + 5 = a(x - 1) + b = ax - a + b$
 $\therefore a = 3, b = 8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

3. 다항식 $8x^3 - 1$ 을 $4x^2 + 2x + 1$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 할 때 $Q(x)$ 의 상수항의 계수는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$8x^3 - 1 = (2x)^3 - 1^3 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$$

$$\therefore Q(x) = 2x - 1$$

$$\therefore \text{상수항은 } -1$$

4. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$ 일 때, $2A + B$ 를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 않은 것을 골라라.

$$\begin{aligned} 2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\ &= (2a + 4b) + (2a + 3b) \quad \text{㉠ 분배법칙} \\ &= 2a + (4b + 2a) + 3b \quad \text{㉡ 결합법칙} \\ &= 2a + (2a + 4b) + 3b \quad \text{㉢ 교환법칙} \\ &= (2a + 2a) + (4b + 3b) \quad \text{㉣ 교환법칙} \\ &= (2 + 2)a + (4 + 3)b \quad \text{㉤ 분배법칙} \\ &= 4a + 7b \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉤

해설

㉤ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

5. 다음 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (\text{}x^2 + \text{}x + \text{) = x + 2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\text{}x^2 + \text{}x + \text{ 라 하면
 $(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div A = x + 2$
 $\therefore A = (x^3 + 4x^2 + 3x - 2) \div (x + 2)$
 $\therefore A = x^2 + 2x - 1$ 이므로
안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1 이다.$

6. $x + y + z = 1$, $xy + yz + zx = 2$, $xyz = 3$ 일 때, $(x + 1)(y + 1)(z + 1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\begin{aligned} & (x + 1)(y + 1)(z + 1) \\ &= xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

7. 세 모서리의 길이의 합이 22이고 대각선의 길이가 14인 직육면체의 겉넓이는?

① 144 ② 196 ③ 288 ④ 308 ⑤ 496

해설

세 모서리를 x, y, z 라 하면

$$x + y + z = 22 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 14 \cdots \cdots \textcircled{2} \text{이고}$$

겉넓이는 $2(xy + yz + zx)$ 이다.

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 22^2 = 14^2 + 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 2(xy + yz + zx) = 288$$

8. $x^2 - x + 1 = 0$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$x^2 - x + 1 = 0$, 양변에 $x + 1$ 을 곱하면,

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$x^3 + 1 = 0, x^3 = -1 \text{ 에서 } x^5 = x^3 \times x^2 = -x^2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \dots\dots ①$$

$x^2 - x + 1 = 0$ 를 x 로 나누어 정리한다.

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = -1$$

$$① \text{ 에 대입하면, } x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

9. $3x^2 + 2xy - y^2 - x + 3y - 2$ 의 인수인 것은?

① $2x + y + 1$

② $x + y + 1$

③ $2x - y + 1$

④ $3x - y + 2$

⑤ $3x + y + 2$

해설

준 식을 내림차순으로 정리하면

$$3x^2 + 2xy - x - y^2 + 3y - 2$$

$$= 3x^2 + (2y - 1)x - (y - 1)(y - 2)$$

$$\text{인수분해하면 } (x + y - 1)(3x - y + 2)$$

10. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 로 인수분해될 때, $|ab - cd|$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$$a = 2, b = 3, c = -2, d = 3$$

$$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$$

11. 두 다항식 $x^3 + 2x^2 - x - 2$,
 $(x - 1)(3x^2 + ax + 2a)$ 의 최대공약수가 이차식이 되도록 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -3$

해설

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 2)(x + 1)$$

$\therefore 3x^2 + ax + 2a$ 는

$x + 2$ 또는 $x + 1$ 을 인수로 가져야 한다.

$f(x) = 3x^2 + ax + 2a$ 로 놓을 때

$x + 2$ 가 인수이면 $f(-2) = 12 - 2a + 2a = 12$ 가 되어 적합하지 않다.

$\therefore x + 1$ 를 인수로 갖는다.

$x + 1$ 이 인수이면 $f(-1) = 3 - a + 2a = 3 + a = 0$

$\therefore a = -3$

12. 세 다항식 $f(x) = x^2 + x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $h(x) = x^2 + mx + 8$ 의 최대공약수가 x 의 일차식일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 6$

해설

$f(x) = (x + 2)(x - 1)$
 $g(x) = (x + 2)(2x - 1)$ 이므로
 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $x + 2$
이것이 $h(x)$ 의 약수이어야 하므로
 $h(-2) = 4 - 2m + 8 = 0$
 $\therefore m = 6$

13. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 에 대하여 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ 이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

- ① 직각삼각형 ② 이등변삼각형
③ 정삼각형 ④ 직각이등변삼각형
⑤ 둔각삼각형

해설

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \text{ 에서 } a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = 0$$

$$\frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = 0 \text{ 이고,}$$

$$a, b, c \text{ 는 실수이므로, } a-b=0, b-c=0, c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서, 주어진 삼각형은 정삼각형이다.

14. $x^{113} + 1$ 을 $x^3 + x$ 로 나누었을 때, 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$ 라고 하자. 이때, $R(2006)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2007

해설

$$\begin{aligned}x^{113} + 1 &= (x^3 + x)Q(x) + R(x) \\ &= x(x^2 + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c\end{aligned}$$

항등식이므로 $x = 0, x^2 = -1$ 을 각각 대입하면,

$$1 = c, \quad x + 1 = -a + bx + c$$

$$\therefore a = 0, \quad b = 1$$

$$\therefore R(x) = x + 1$$

$$\text{따라서 } R(2006) = 2007$$

15. 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $f(x) + g(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 으로 나누면 나머지가 9, $f(x) - g(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나누면 나머지가 -3이다. 이 때, $f(x)$ 를 $x^2 + x + 1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$f(x) + g(x) = (x^2 + x + 1)Q_1(x) + 9 \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$f(x) - g(x) = (x^2 + x + 1)Q_2(x) - 3 \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B}$ 을 하면

$$2f(x) = (x^2 + x + 1) \{Q_1(x) + Q_2(x)\} + 6$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1) \frac{Q_1(x) + Q_2(x)}{2} + 3$$

$\therefore$ 나머지는 3

16. 다항식 $f(x)$ 를 $\left(x - \frac{2}{3}\right)$ 로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$ 를 $3x - 2$ 로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x), R$

② $3Q(x), R$

③ $Q(x), 3R$

④ $\frac{1}{3}Q(x), R$

⑤ $Q(x), \frac{1}{3}R$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{2}{3}\right)Q(x) + R \\ &= 3\left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}Q(x) + R \\ &= (3x - 2)\frac{1}{3}Q(x) + R \end{aligned}$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫: $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지: R

17. $x^4 - 11x^2 + 1$ 이 $(x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)$ 로 인수분해될 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 11x^2 + 1 &= (x^2 - 1)^2 - 9x^2 \\&= (x^2 - 1)^2 - (3x)^2 \\&= (x^2 - 3x - 1)(x^2 + 3x - 1) \\&= (x^2 + ax + b)(x^2 + 3x + b)\end{aligned}$$

$$\therefore a = -3, b = -1$$

$$\therefore a + b = -4$$

18. 두 다항식 $x^2 + 3x + p$, $x^2 + px + q$ 의 최소공배수가 $x^3 - 13x + 12$ 일 때, $p + q$ 의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$x^3 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$ 두 다항식의 곱이 4차 식이고 최소공배수가 3차식이므로 최대공약수는 1차식이다.

($\because AB = GL$)

i) G.C.M. = $x - 1$ 이면 $p = -4$, $q = 3$

이 때 두 식은 $(x - 1)(x + 4)$, $(x - 1)(x - 3)$ 이므로 조건에 맞는다.

ii) G.C.M. = $x - 3$ 이면 $p = -18$, $q = 45$

이 때 두 식은 $(x - 3)(x + 6)$, $(x - 3)(x - 15)$ 이므로 조건에 맞지 않는다.

iii) G.C.M. = $x + 4$ 일 때도 ii)와 같음

i), ii), iii)에서 $p + q = -1$

19. 다항식 $p(x)$ 는 다음 등식을 만족시킨다.

$$\frac{p(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} + \frac{d}{x-4} + \frac{e}{x-5}$$

이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c, d, e 는 상수)

- ☐

㉠

☐

$p(3) = 3$ 이면 $c = 3$ 이다.

☐

㉡

☐

$p(1) = p(5)$ 이면 $a = e$ 이다.
- ☐

㉢
- ☐

$b = 2$ 이면 $p(2) = -12$ 이다.

☐

㉤

☐

$a : bc = p(1) : p(2)p(3)$ 이다.

- ☐

①

☐

㉠, ㉡

☐

③

☐

㉢, ㉤
- ☐

②

☐

㉡, ㉢
- ☐

④

☐

㉠, ㉡, ㉢

☐

⑤

☐

㉡, ㉢, ㉤

해설

주어진 식의 양변에 $x-1$ 을 곱하면

$$\frac{p(x)}{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)} = a + \frac{b(x-1)}{x-2} + \frac{c(x-1)}{x-3} + \frac{d(x-1)}{x-4} + \frac{e(x-1)}{x-5}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$a = \frac{p(1)}{(-1)(-2)(-3)(-4)}$$

같은 방법으로

$$b = \frac{p(2)}{1 \cdot (-1)(-2)(-3)}, \quad c = \frac{p(3)}{2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2)}, \quad d = \frac{p(4)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)}, \quad e = \frac{p(5)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

따라서 ㉡, ㉢만 옳다.

20. 10차 다항식 $P(x)$ 가 $P(k) = \frac{k}{k+1}$ (단, $k = 0, 1, 2, \dots, 10$)을 만족

시킬 때, $P(11)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{6}$
- ② $\frac{1}{3}$
- ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{5}{6}$
- ⑤ 1

해설

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \Rightarrow (k+1)P(k) - k = 0$$

$$f(x) = (x+1)P(x) - x \text{라 하면}$$

$$f(x) \text{는 } f(0) = f(1) = f(2) = \dots = f(10) = 0 \text{인 다항식이다.}$$

$$\therefore f(x) = ax(x-1)(x-2)\dots(x-10)$$

$$\text{또, } f(-1) = 1 = a(-1)(-2)\dots(-11) = -a \cdot 11! \text{(단, } 11! = 1 \times 2 \times \dots \times 11)$$

$$\therefore a = -\frac{1}{11!}$$

$$f(11) = 12P(11) - 11$$

$$= -\frac{1}{11!} \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1 = -1$$

$$\therefore P(11) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

21. 다항식 $f(x)$ 를 $x-1$, x^2-4x+5 , $(x-1)(x^2-4x+5)$ 로 나누면 나머지가 각각 4, $px+q$, $(x-r)^2$ 이 될 때, pqr 의 값은? (단, $r > 0$)

- ① -24 ② -36 ③ 20 ④ 18 ⑤ 14

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-4x+5)Q(x) + px+q \cdots \textcircled{1} \\ &= (x-1)(x^2-4x+5)Q'(x) + (x-r)^2 \cdots \textcircled{2} \\ &= (x-1)(x^2-4x+5)Q'(x) + (x^2-4x+5) + px+q \cdots \textcircled{3} \\ f(1) &= 4 \text{ 이므로 } \textcircled{2} \text{에서 } f(1) = (1-r)^2 = 4 \\ r &> 0 \text{ 이므로 } r = 3 \\ \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 비교해 보면} \\ (x-r)^2 &= (x^2-4x+5) + px+q \\ r = 3 \text{ 을 대입하면} \\ (x-3)^2 &= x^2 + (p-4)x + (q+5) \\ \therefore p-4 &= -6, q+5 = 9 \\ \therefore p &= -2, q = 4 \\ \therefore pqr &= -24 \end{aligned}$$

22. 세 실수 a, b, c 사이에 $a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab$ 인 관계가 성립할 때, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 0, 2
④ 0, 1 ⑤ 0, 1, 2

해설

$$a^2 - bc = b^2 - ac \text{ 에서 } (a^2 - b^2) + (ac - bc) = 0$$

$$\therefore (a + b + c)(a - b) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$b^2 - ac = c^2 - ab \text{ 에서 } (b^2 - c^2) + (ab - ac) = 0$$

$$\therefore (a + b + c)(b - c) = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 에서 } a + b + c = 0 \text{ 또는 } a = b = c$$

$$\text{한편 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \text{ 이므로}$$

$$\text{i) } a + b + c = 0 \text{ 일 때 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

$$\text{ii) } a = b = c \text{ 일 때}$$

$$(\text{준식}) = 3a^3 - 3a^3 = 0$$

$$\text{따라서 } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$$

23. $10^{20} - 4$ 과 $10^{30} - 8$ 의 최대공약수는 몇 자리의 자연수인가?

① 10자리

② 11자리

③ 12자리

④ 13자리

⑤ 14자리

해설

$$\begin{aligned}10^{20} - 4 &= (10^{10})^2 - 2^2 \\&= (10^{10} - 2)(10^{10} + 2) \\10^{30} - 8 &= (10^{10})^3 - 2^3 \\&= (10^{10} - 2)(10^{20} + 10^{10} \times 2 + 4) \\\therefore \text{최대 공약수는 } 2(10^{10} - 2) &= 2 \cdot 10^{10} - 4 \\\therefore \text{11자리수}\end{aligned}$$