1. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 = 16$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 16 &= 0 \text{ 에서} \\(x^2 - 4)(x^2 + 4) &= 0 \\(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) &= 0 \\ \therefore x &= \pm 2 \text{ 또는 } x = \pm 2i \\ \therefore \text{모든 해의 합은 } &(-2) + 2 + (-2i) + 2i = 0\end{aligned}$$

2. 방정식 $(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$(x^2 + 2)^2 - 6x^2 - 7 = 0$ 에서
 $x^4 + 4x^2 + 4 - 6x^2 - 7 = 0$
 $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
 $x^2 = t$ 로 치환하면
 $t^2 - 2t - 3 = 0, (t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $x^2 = 3$ 일 때, $x = \pm\sqrt{3}$
(ii) $x^2 = -1$ 일 때, $x = \pm i$
(i), (ii)에서 실근의 합을 구하면
 $\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0$

3. 삼차방정식 $x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근 α, β, γ 에 대하여 $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$ 를 세 근으로 갖는 삼차방정식이 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 일 때, $a - 2b + c$ 의 값은?

- ① -3   ② -2   ③ -1   ④ 0   ⑤ 1

해설

$x^3 + x^2 + 2x - 3 = 0$ 의 세 근이 α, β, γ 라 하면
 $\alpha + \beta + \gamma = -1, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2, \alpha\beta\gamma = 3$
구하려는 방정식의 세 근의 합
 $-1 + 2 + 3 = 4 \therefore a = -4$
 $(-1) \times 2 + 2 \times 3 + (-1) \times 3 = -2 + 6 - 3 = 1 \therefore b = 1$
세 근의 곱 $(-1) \times 2 \times 3 = -6 \therefore c = 6$
 $\therefore a - 2b + c = -4 - 2 + 6 = 0$

4. 삼차방정식 $x^3 - 4x^2 + x + k = 0$ 의 한 근이 -1 일 때, k 의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10   ② 11   ③ 12   ④ 13   ⑤ 14

해설

$x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 - 4(-1) + 1 + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ 의 나머지 두 근을 α, β 라 하면

$$\text{세 근의 합 } 4 = -1 + \alpha + \beta \text{에서 } \alpha + \beta = 5$$

$$\therefore k + \alpha + \beta = 11$$

5. 방정식 $x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a 의 값들의 합은?

- ① 30   ② 25   ③ 23   ④ 18   ⑤ 13

해설

$x^4 - ax^2 + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2 = y$ 라고 치환하여 $y^2 - ay + 8 - a = 0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

i) $D = a^2 - 4(8 - a) = a^2 + 4a - 32 = (a + 8)(a - 4) > 0$

$\therefore a < -8$ 또는 $a > 4$

ii) $a > 0$

iii) $8 - a > 0 \Rightarrow a < 8$

$\therefore 4 < a < 8$ 이므로 $a = 5, 6, 7$