1. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $2z+3\overline{z}=5-2i$를 만족하는 복소수 z의 역수는?

① $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$　　② $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$　　③ $-1-2i$
④ $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$　　⑤ $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

해설

$z=a+bi,\ \overline{z}=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 두면
$2z+3\overline{z}=5-2i$
$2(a+bi)+3(a-bi)=5-2i$
$5a-bi=5-2i$
복소수 상등에 의하여
$a=1,\ b=2$
$\therefore\ z=1+2i$
(z의 역수)$=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

2. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+1=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k \le 2$ ② $k \ge 2$ ③ $-2 \le k < 2$
④ $4 < k \le 6$ ⑤ $2 \le k < 4$

해설

양수이려면 판별식이 0보다 크거나 같고, 두근의 합, 곱이 양수이다.
(i) $D=(k-4)^2-4 \ge 0$, $k^2-8k+12 \ge 0$
$(k-2)(k-6) \ge 0$
$k \le 2$ 또는 $k \ge 6$
(ii) 두 근의 합 : $-(k-4) > 0$, $k < 4$
(i), (ii) 의 공통부분을 구하면 $k \le 2$

3. 이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 x축에 접하도록 하는 상수 $p,\ q$의 값은?

① $p = -1,\ q = -1$ 또는 $p = -3,\ q = -9$

② $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

③ $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

④ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

⑤ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가
점 $(-1,\ 4)$를 지나므로
$4 = 1 - 2p + q$에서
$2p - q = -3 \cdots$ ㉠
한편, x축에 접하므로
$D/4 = p^2 - q = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

4. 이차함수 $y = x^2 + 2ax - b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 2 를 갖는다. 이때, $a + b$ 를 구하여라.

▶ 답：

▷ 정답： -14

해설

$y = x^2 + 2ax - b$
$= (x-3)^2 + 2$
$= x^2 - 6x + 11$

$2a = -6$
$\therefore a = -3$

$-b = 11$
$\therefore b = -11$

$\therefore\ a + b = -3 + (-11) = -14$

5. $x+y=3, x\geq 0, y\geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x\geq 0$
$\therefore\ 0\leq x\leq 3$
$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$
$x=1$ 일 때, $m=6$
$x=3$ 일 때, $M=18$
$\therefore\ M-m=12$

6. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

7. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① -7　　② 3　　③ 1　　④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4=-7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3=-\sqrt{2}+5i$,
$(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i$
$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$
$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$
$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$
$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$
$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$
$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$
$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:
$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$
$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$
$\therefore\ a-b-c-d=-7$

8. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i, \frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f(\frac{1-i}{1+i})+f(\frac{1+i}{1-i})$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$

$=i^{98}+(-i)^{98}$

$=i^2+i^2$

$=-2$

9. $x^2 + 3ax + b = 0$과 $x^2 - ax + c = 0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2 + b - c$가 최소가 되는 a의 값은 ?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

조건에서

$1 + 3a + b = 0 \cdots$ ㉠

$1 - a + c = 0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ : $4a + b - c = 0$

$\therefore\ b - c = -4a$

$\therefore\ 2a^2 + b - c = 2a^2 - 4a = 2(a-1)^2 - 2$

따라서 $a = 1$일 때, 최소이다.

10. $x^2-xy-6y^2+x+7y+k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되도록 상수 k의 값을 정하면?

① -2 ② -4 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

x에 관해 식을 정리하면

$f(x)=x^2+(1-y)x+(-6y^2+7y+k)$

$f(x)$가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면

$D=(1-y)^2-4(-6y^2+7y+k)$가 완전제곱식이어야 한다.

$D=25y^2-30y+(1-4k)$에서

$\frac{D}{4}=(-15)^2-25(1-4k)=0$

$\therefore\ k=-2$

11. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

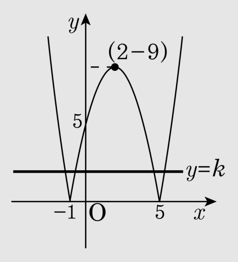
① $0<k<3$ ② $0<k<5$ ③ $3<k<5$

④ $1<k<4$ ⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

12. x 가 실수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\dfrac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}=k$ 라 하면
$x^2+4x-1=k(x^2-2x+3)$
$(k-1)x^2-(2k+4)x+3k+1=0$
$D/4=(k+2)^2-(k-1)(3k+1)\geq 0$
$-2k^2+6k+5\geq 0$
근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은
3 이다.

13. 초속 50m 로 지상에서 곧바로 위로 던진 돌의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 x 와 y 사이에는 $y = 40x - 5x^2$ 의 관계식이 성립한다. 돌이 최고의 높이에 도달하는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 초 후

▷ 정답 : 4초 후

해설

$y = 40x - 5x^2$

$y = -5(x - 4)^2 + 80$

$x = 4$ 일 때, 최댓값 80 을 갖는다.

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2(a+2)x+2a^2+6=0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 a 의 값을 구하면?

① -1　　② 3　　③ $-1,\ -3$

④ $1,\ 3$　　⑤ $-3,\ 1$

해설

정수근을 가지려면 일단은 $D \geq 0$ 이어야 하므로$\mathrm{D}/4 = (\mathrm{a}+2)^2-2\mathrm{a}^2-6 \geq 0$ 에서 $2-\sqrt{2} \leq a \leq 2+\sqrt{2}$ $\cdots$①

그런데 a 는 정수이므로 ①에서 $a=1,\ 2,\ 3$

i) $a=1$ 일 때 $x^2-6x+8=0$ 의 두 근은

$x=2,\ 4$ (조건을 만족)

ii) $a=2$ 일 때 $x^2-8x+14=0$ 의 두 근은

$x=4\pm\sqrt{2}$ (조건에 위배)

iii) $a=3$ 일 때 $x^2-10x+24=0$ 의 두 근은

$x=4,\ 6$ (조건을 만족)

i), ii), iii) 에서 $a=1,\ 3$

15. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α,β이므로,

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta, \alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{-b+c}{a}=\frac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c, a=-b, c=-2a$

$\alpha+\beta=-\frac{(-a)}{a}=1, \alpha\beta=\frac{-2a}{a}=-2$

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7\end{aligned}$$

16. 실계수 이차방정식이 두 허근 α,β를 갖고 $\alpha^2+2\beta=1$일 때, 이 이차 방정식은?

① $x^2+2x+3=0$　　② $x^2+4x+6=0$

③ $x^2-2x+3=0$　　④ $x^2-4x+6=0$

⑤ $x^2-3x+2=0$

해설

$\alpha=m+ni,\ \beta=m-ni$

$(m,\ n\ :\ $ 실수, $n\neq 0)$라 놓으면

$\alpha^2+2\beta=(m+ni)^2+2(m-ni)$

$=(m^2-n^2+2m)+2n(m-1)i=1$에서

$n\neq 0$이므로 $m=1,\ n^2=2$

$\alpha+\beta=2m=2$

$\alpha\beta=m^2+n^2=3$

$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-2x+3=0$

17. 삼차방정식 $x^3+px+2=0$의 세 근이 모두 정수일 때, p의 값을 구하면?

① 4　② -3　③ -2　④ 4　⑤ 5

해설

세 근을 α , β , γ 라고 하면
$\alpha+\beta+\gamma=0$ ······㉠
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$ ······㉡
$\alpha\beta\gamma=-2$ ······㉢
㉢에서
$-2=(-1)\times1\times2=1\times1\times(-2)=(-1)(-1)(-2)$
㉠에서 $\alpha+\beta+\gamma=0$ 이어야 하므로
$\alpha=1, \beta=1, \gamma=-2$
㉡에서 $p=1\times1+1\times(-2)+(-2)\times1=-3$

18. 방정식 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\omega^2+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^8$의 값을 구하면?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ i

해설

준 방정식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$x^5-1=0$

$\therefore x^5=1$ 즉, $\omega^5=1$

$\therefore\ \omega^2+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^8$

$=\omega^2+\omega^4+1+\omega+\omega^3$

$=1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$

19. 빗변의 길이가 6 , 내접원의 반지름의 길이가 1 인 직각삼각형의 다른 두변의 길이를 구하면?

① $4+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2}$　　② $\sqrt{10}+2\sqrt{2},\ \sqrt{10}-2\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{3}+\sqrt{6},\ 2\sqrt{3}-\sqrt{6}$　　④ $2\sqrt{5},\ 4$

⑤ $3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}$

해설

빗변이 아닌 두 변의 길이를 $x,\ y$ 라 하면

$x^2+y^2=36\cdots$ ㉠

또, $(x-1)+(y-1)=6$

$\therefore\ x+y=8\cdots$ ㉡

㉡^{2} − ㉠에서 $2xy=28$

$\therefore\ xy=14$

따라서, $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-8t+14=0$ 의 두 근 $4+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2}$ 이다.

20. 다음은 m이 자연수일 때, $x,\ y$에 관한 방정식 $2x^2+5xy-3y^2=m$이 자연수의 해 $x,\ y$를 한 쌍만 가지도록 하는 m의 최소값을 구하는 과정이다.

> $2x^2+5xy-3y^2=m$의 좌변을 인수분해하면
> $(2x-y)(x+3y)=m$
> 여기서 $2x-y=p,\ x+3y=q$로 놓으면, $q \geq$ (가)
> 그런데 m은 자연수이고 $p \geq 1$이므로
> $m=pq \geq$ (나)
> 이 때, 등호는 $q=$ (가), $p=$ (다) 일 때 성립하므로
> 구하는 m의 최소값은 (라) 이다.

(라) 안에 알맞은 수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+3y=q$에서 $x \geq 1,\ y \geq 1$이므로
$q \geq 1+3\cdot 1=(4)$
$p \geq 1,\ q \geq 4$이므로 $m=pq \geq 1\cdot 4 \geq (4)$
$q=(4)$일 때, $x=1,\ y=1$이고, $p=(1)$이므로
m의 최솟값은 (4)이다