1. 복소수 z 와 그 켤레복소수 $\overline{z}$에 대하여 $2z+3\overline{z}=5-2i$를 만족하는 복소수 z의 역수는?

① $-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}i$ ② $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$ ③ $-1-2i$
④ $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$ ⑤ $\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

해설

$z=a+bi,\ \overline{z}=a-bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 두면

$2z+3\overline{z}=5-2i$

$2(a+bi)+3(a-bi)=5-2i$

$5a-bi=5-2i$

복소수 상등에 의하여

$a=1,\ b=2$

$\therefore\ z=1+2i$

(z의 역수)$=\frac{1}{1+2i}=\frac{1-2i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$

2. 이차방정식 $x^2+(k-4)x+1=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $k \le 2$　② $k \ge 2$　③ $-2 \le k < 2$

④ $4 < k \le 6$　⑤ $2 \le k < 4$

해설

양수이려면 판별식이 0보다 크거나 같고, 두근의 합, 곱이 양수이다.

(i) $D=(k-4)^2-4 \ge 0$, $k^2-8k+12 \ge 0$

$(k-2)(k-6) \ge 0$

$k \le 2$ 또는 $k \ge 6$

(ii) 두 근의 합 : $-(k-4) > 0$, $k < 4$

(i), (ii)의 공통부분을 구하면 $k \le 2$

3. 이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가 점 $(-1,\ 4)$를 지나고 x축에 접하도록 하는 상수 $p,\ q$의 값은?

① $p = -1,\ q = -1$ 또는 $p = -3,\ q = -9$

② $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

③ $p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

④ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = -3,\ q = 9$

⑤ $p = 1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2px + q$의 그래프가
점 $(-1,\ 4)$를 지나므로
$4 = 1 - 2p + q$에서
$2p - q = -3 \cdots$ ㉠
한편, x축에 접하므로
$D/4 = p^2 - q = 0 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$p = -1,\ q = 1$ 또는 $p = 3,\ q = 9$

4. 이차함수 $y = x^2 + 2ax - b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 2 를 갖는다. 이때, $a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$
\begin{aligned}
y &= x^2 + 2ax - b \\
&= (x-3)^2 + 2 \\
&= x^2 - 6x + 11
\end{aligned}
$$

$2a = -6$

$\therefore a = -3$

$-b = 11$

$\therefore b = -11$

$\therefore\ a + b = -3 + (-11) = -14$

5. $x+y=3, x \geq 0, y \geq 0$ 일 때, $2x^2+y^2$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하면 $M-m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$y=3-x \geq 0$

$\therefore \ 0 \leq x \leq 3$

$2x^2+y^2=2x^2+(3-x)^2=3(x-1)^2+6$

$x=1$ 일 때, $m=6$

$x=3$ 일 때, $M=18$

$\therefore \ M-m=12$

6. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0,$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

7. 유리수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(\sqrt{2}+i)^4+a(\sqrt{2}+i)^3+b(\sqrt{2}+i)^2+c(\sqrt{2}+i)+d=0$을 만족한다. 이 때, $a-b-c-d$의 값은? (단, $i^2=-1$)

① -7 ② 3 ③ 1 ④ -1

해설

$(\sqrt{2}+i)^4=-7+4\sqrt{2}i$, $(\sqrt{2}+i)^3=-\sqrt{2}+5i$,

$(\sqrt{2}+i)^2=1+2\sqrt{2}i$

$(-7+4\sqrt{2}i)+a(-\sqrt{2}+5i)$

$+b(1+2\sqrt{2}i)+c(\sqrt{2}+i)+d=0$

$(-7-\sqrt{2}a+b+\sqrt{2}c+d)$

$+(4\sqrt{2}+5a+2\sqrt{2}b+c)i=0$

$\therefore\ (-7+b+d)+(c-a)\sqrt{2}=0,$

$(5a+c)+(4+2b)\sqrt{2}=0$

$a,\ b,\ c,\ d$ 는 유리수이므로 $-7+b+d=0$:

$c-a=0,\ 5a+c=0,\ 4+2b=0$

$\therefore\ a=0,\ b=-2,\ c=0,\ d=9$

$\therefore\ a-b-c-d=-7$

8. $f(x)=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$\frac{1-i}{1+i}=-i,\ \frac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f(\frac{1-i}{1+i})+f(\frac{1+i}{1-i})$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{98}$

$=i^{98}+(-i)^{98}$

$=i^2+i^2$

$=-2$

9. $x^2+3ax+b=0$과 $x^2-ax+c=0$은 공통근 1을 갖는다. 이 때, $2a^2+b-c$가 최소가 되는 a의 값은 ?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

조건에서

$1+3a+b=0 \cdots$ ㉠

$1-a+c=0 \cdots$ ㉡

㉠ − ㉡ : $4a+b-c=0$

$\therefore\ b-c=-4a$

$\therefore\ 2a^2+b-c=2a^2-4a=2(a-1)^2-2$

따라서 $a=1$일 때, 최소이다.

10. $x^2 - xy - 6y^2 + x + 7y + k$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k의 값을 정하면?

① -2　② -4　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

x에 관해 식을 정리하면

$f(x) = x^2 + (1-y)x + (-6y^2 + 7y + k)$

$f(x)$가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면

$D = (1-y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$가 완전제곱식이어야 한다.

$D = 25y^2 - 30y + (1-4k)$에서

$$\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1-4k) = 0$$

$\therefore\ k = -2$

11. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

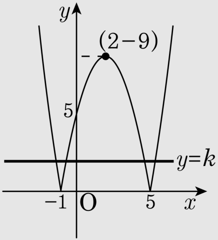
① $0<k<3$ ② $0<k<5$ ③ $3<k<5$

④ $1<k<4$ ⑤ $-2<k<5$

해설

방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

12. x 가 실수일 때, 함수 $f(x)=\frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+3}=k$ 라 하면

$x^2+4x-1=k(x^2-2x+3)$

$(k-1)x^2-(2k+4)x+3k+1=0$

$D/4=(k+2)^2-(k-1)(3k+1)\geq 0$

$-2k^2+6k+5\geq 0$

근과 계수의 관계에 의해 최댓값 최솟값의 합은

3 이다.

13. 초속 50m 로 지상에서 곧바로 위로 던진 돌의 x 초 후의 높이를 ym 라고 하면 x 와 y 사이에는 $y = 40x - 5x^2$ 의 관계식이 성립한다. 돌이 최고의 높이에 도달하는 것은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답: ________ 초 후

▷ 정답: 4초 후

해설

$y = 40x - 5x^2$

$y = -5(x - 4)^2 + 80$

$x = 4$ 일 때, 최댓값 80 을 갖는다.

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2(a+2)x+2a^2+6=0$ 의 두 근이 정수일 때, 정수 a 의 값을 구하면?

① -1 ② 3 ③ $-1,\ -3$

④ $1,\ 3$ ⑤ $-3,\ 1$

해설

정수근을 가지려면 일단은 $D \geq 0$ 이어야 하므로$D/4=(\mathrm{a}+2)^2-2\mathrm{a}^2-6\geq 0$ 에서 $2-\sqrt{2}\leq a\leq 2+\sqrt{2}$ ⋯①

그런데 a 는 정수이므로 ①에서 $a=1,\ 2,\ 3$

i) $a=1$ 일 때 $x^2-6x+8=0$ 의 두 근은

$x=2,\ 4$ (조건을 만족)

ii) $a=2$ 일 때 $x^2-8x+14=0$ 의 두 근은

$x=4\pm\sqrt{2}$ (조건에 위배)

iii) $a=3$ 일 때 $x^2-10x+24=0$ 의 두 근은

$x=4,\ 6$ (조건을 만족)

i), ii), iii) 에서 $a=1,\ 3$

15. x에 대한 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\alpha+\beta, \alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식은 $ax^2-bx+c=0$이 된다. 이 때, $\alpha^3+\beta^3$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$ax^2+bx+c=0$ 두 근이 α,β이므로,

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$ax^2-bx+c=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로

$$\begin{cases} \text{두근의 합} : -\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}=\dfrac{-b+c}{a}=\dfrac{b}{a} \\ \text{두근의 곱} : -\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$2b=c$, $a=-b$, $c=-2a$

$\alpha+\beta=-\dfrac{(-a)}{a}=1$, $\alpha\beta=\dfrac{-2a}{a}=-2$

$$\begin{aligned} \alpha^3+\beta^3 &= (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \\ &= 1^3-3\cdot(-2)\cdot 1=1+6=7 \end{aligned}$$

16. 실계수 이차방정식이 두 허근 α, β를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$일 때, 이 이차방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$
② $x^2 + 4x + 6 = 0$
③ $x^2 - 2x + 3 = 0$
④ $x^2 - 4x + 6 = 0$
⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$\alpha = m + ni,\ \beta = m - ni$

$(m,\ n\ :\ $ 실수, $n \neq 0)$라 놓으면

$$\alpha^2 + 2\beta = (m + ni)^2 + 2(m - ni)$$
$$= (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m-1)i = 1$$ 에서

$n \neq 0$이므로 $m = 1,\ n^2 = 2$

$\alpha + \beta = 2m = 2$

$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$

$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2 - 2x + 3 = 0$

17. 삼차방정식 $x^3+px+2=0$의 세 근이 모두 정수일 때, p의 값을 구하면?

① 4 ② -3 ③ -2 ④ 4 ⑤ 5

해설

세 근을 α , β , γ 라고 하면

$\alpha+\beta+\gamma=0$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=p$ ⋯⋯ ㉡

$\alpha\beta\gamma=-2$ ⋯⋯ ㉢

㉢에서

$-2=(-1)\times1\times2=1\times1\times(-2)=(-1)(-1)(-2)$

㉠에서 $\alpha+\beta+\gamma=0$ 이어야 하므로

$\alpha=1, \beta=1, \gamma=-2$

㉡에서 $p=1\times1+1\times(-2)+(-2)\times1=-3$

18. 방정식 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\omega^2+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^8$의 값을 구하면?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ i

해설

준 방정식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$x^5-1=0$

$\therefore x^5=1$ 즉, $\omega^5=1$

$\therefore\ \omega^2+\omega^4+\omega^5+\omega^6+\omega^8$

$=\omega^2+\omega^4+1+\omega+\omega^3$

$=1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$

19. 빗변의 길이가 6 , 내접원의 반지름의 길이가 1 인 직각삼각형의 다른 두변의 길이를 구하면?

① $4+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2}$　② $\sqrt{10}+2\sqrt{2},\ \sqrt{10}-2\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{3}+\sqrt{6},\ 2\sqrt{3}-\sqrt{6}$　④ $2\sqrt{5},\ 4$

⑤ $3\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}$

해설

빗변이 아닌 두 변의 길이를 $x,\ y$ 라 하면

$x^2+y^2=36\cdots$㉠

또, $(x-1)+(y-1)=6$

$\therefore\ x+y=8\cdots$㉡

㉡^{2} $-$ ㉠에서 $2xy=28$

$\therefore\ xy=14$

따라서, $x,\ y$ 는 이차방정식 $t^2-8t+14=0$ 의 두 근 $4+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2}$ 이다.

20. 다음은 m이 자연수일 때, x, y에 관한 방정식 $2x^2+5xy-3y^2=m$이 자연수의 해 x, y를 한 쌍만 가지도록 하는 m의 최소값을 구하는 과정이다.

$2x^2+5xy-3y^2=m$의 좌변을 인수분해하면 $(2x-y)(x+3y)=m$ 여기서 $2x-y=p$, $x+3y=q$로 놓으면, $q\geq$ (가) 그런데 m은 자연수이고 $p\geq 1$이므로 $m=pq\geq$ (나) 이 때, 등호는 $q=$ (가), $p=$ (다) 일 때 성립하므로 구하는 m의 최소값은 (라) 이다.

(라) 안에 알맞은 수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+3y=q$에서 $x\geq 1$, $y\geq 1$이므로
$q\geq 1+3\cdot 1=(4)$
$p\geq 1$, $q\geq 4$이므로 $m=pq\geq 1\cdot 4\geq (4)$
$q=(4)$ 일 때, $x=1$, $y=1$이고, $p=(1)$이므로
m의 최솟값은 (4)이다