1. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+8$이 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 $a,\ b$의 값은?

① $a=-2,\ b=-8$
② $a=3,\ b=4$
③ $a=-1,\ b=-3$
④ $a=4,\ b=-2$
⑤ $a=-3,\ b=7$

해설

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+8$로 놓으면
$x-1$과 $x-2$로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1)=0,\ f(2)=0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=2+a+b+8=0,$
$f(2)=16+4a+2b+8=0$

$\therefore\ a+b=-10,\ 2a+b=-12$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-8$

2. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다.
이 때, a, b, c를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$ ② $-1,\ 1,\ 2$ ③ $-2,\ -1,\ 1$
④ $-1,\ -1,\ -2$ ⑤ $-1,\ 2$

해설

$$x^2-2x-y^2+2y=(x+y)(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-2)$$
$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

3. $a,\ b$가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$을 만족하는 $a,\ b$의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$에서
$(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$
$a,\ b$가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0,\ 4a-5b+6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=2$
따라서 $a+b=3$ 이다.

4. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

ⅰ) $x<1$일 때,
$-2(x-1)+(x-4)=0$
$\therefore x=-2$
ⅱ) $x \geq 1$일 때,
$2(x-1)+x-4=0$
$\therefore x=2$
따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

5. x 에 대한 이차함수 $y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$ 에 대하여 y 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 y 의 값으로 옳은 것은?

① $x = k,\ y = k^2 + k + 2$
② $x = k,\ y = k^2 - 3k + 4$
③ $x = 2k,\ y = k^2 + 4k + 1$
④ $x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$
⑤ $x = 3k,\ y = 2k^2 - 3k + 6$

해설

$y = x^2 - 4kx + 5k^2 - 5k + 7$
$= (x - 2k)^2 + k^2 - 5k + 7$ 이므로
주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때
최솟값 $k^2 - 5k + 7$ 을 갖는다.
따라서, 구하는 x, y 의 값은
$x = 2k,\ y = k^2 - 5k + 7$

6. 그래프의 모양이 $y=-2x^2$ 과 같고 $x=1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y=-2x^2-4x+4$
② $y=-2x^2-4x+5$
③ $y=-2x^2+4x-3$
④ $y=-2x^2+4x+3$
⑤ $y=-2x^2-x+5$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 5), x^2 의 계수가 -2 이므로

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2+5 \\ &= -2(x^2-2x+1)+5 \\ &= -2x^2+4x+3 \end{aligned}$$

$\therefore y=-2x^2+4x+3$

7. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2) \div (\square x^2+\square x+\square) = x+2$$

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: 1

▷ 정답: 2

▷ 정답: −1

해설

$\square x^2+\square x+\square = A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2) \div A = x+2$

$\therefore A = (x^3+4x^2+3x-2) \div (x+2)$

$\therefore A = x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, −1이다.

8. 다항식 $f(x)$에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$일 때, $f(x)$를 $(2x-1)(3x-1)$로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$을 각각 양변에 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$ 구하는 나머지는 $12x-3$

9. $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$

$=\{1+(-i)+(-1)+i\}+\{1+(-i)+(-1)+i\}+1$

$=1$

10. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2am - 2m + b$의 그래프가 m의 값에 관계없이 x축에 접할 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 4　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2 - 2ax + 2am - 2m + b = 0$에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (2am - 2m + b) = 0$

$\therefore a^2 - 2am + 2m - b = 0$

이 식이 m의 값에 관계없이 성립하므로

$(2 - 2a)m + (a^2 - b) = 0$에서

$2 - 2a = 0,\ a^2 - b = 0$

따라서 $a = 1,\ b = 1$이므로 $ab = 1$

11. $x=\dfrac{3+i}{1-i}$ 일 때, x^3-3x^2+2x+4 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $4-10i$ ② $-3-10i$ ③ $-4+10i$
④ $4+10i$ ⑤ $3+10i$

해설

$x=\dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$
$x^2=(1+2i)^2=-3+4i$
$x^3=(-3+4i)(1+2i)=-11-2i$
$x^3-3x^2+2x+4=(-11-2i)-3(-3+4i)+2(1+2i)+4=4-10i$

해설

$x=\dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2+4i}{2}=1+2i$ 에서 $x-1=2i$
$(x-1)^2=(2i)^2=-4$
$x^2-2x+5=0$,
x^3-3x^2+2x+4
$=x(x^2-2x+5)-x^2-3x+4$
$=-(2x-5)-3x+4$
$=-5x+9=-5(1+2i)+9$
$=4-10i$

12. $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개　② 1개　③ 2개　④ 3개　⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$

라 하면 ㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$일 때 ;

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0, 1$

(ii) $x = 2y$일 때 ;

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0, -\frac{1}{3}$

$\therefore = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$

13. x의 이차방정식 $mx^2 + 2(1-2m)x + m = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0 < m < \frac{1}{3}$ ② $m < \frac{1}{3},\ m > 1$

③ $m < 0,\ 0 < m < \frac{1}{3},\ m > 1$ ④ $m < 0\ ,\ m > 1$

⑤ $\frac{1}{3} < m < 1$

해설

이차방정식이므로 $m \neq 0 \quad \cdots$㉠

$\frac{D}{4} = (1-2m)^2 - m^2 > 0$에서

$(m-1)(3m-1) > 0,\ m < \frac{1}{3},\ m > 1 \quad \cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $m < 0,\ 0 < m < \frac{1}{3},\ m > 1$

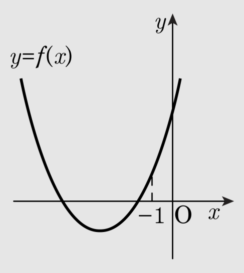
14. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 3개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면
방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서
$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$
$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$
(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\dfrac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$
이상에서 $-7<k<-3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

15. x^4-6x^2+1 을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ 가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$ 의 값을 구하면?

① -2　② 2　③ -1　④ 1　⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$
$=(x^2-1)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$
$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$
$\therefore\ a+b+c+d=-2$

16. α, β가 x에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$\boxed{(x-\alpha)(x-\beta)+k=0}$$

① $\alpha,\ \beta$　② $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$　③ $p,\ q$
④ $\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}$　⑤ $-p,\ -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$을 정리하면
$x^2+(p+q)x+(pq-k)=0$
이 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha+\beta=-(p+q),\ \alpha\beta=pq-k \cdots$ ㉮
방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$을 정리하면
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+k=0$
$\therefore\ x^2+(p+q)x+pq=0$ ($\because$ ㉮ 대입)
$\therefore\ (x+p)(x+q)=0$
따라서 구하는 두 근은 $x=-p,\ -q$

17. 오차방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$의 허근을 α ,β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$에서
$(x+1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0$
$\therefore\ x+1=0$ 또는
$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$
(i) $x+1=0$에서 $x=-1$
(ii) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 양변을
x^2으로 나누면

$$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(s^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$$

$$=0\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

이 때, $x+\dfrac{1}{x}=t$로 치환하면
$t^2-4t+3=0,\ (t-1)(t-3)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

①$x+\dfrac{1}{x}=1$일 때, $x^2-x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

②$x+\dfrac{1}{x}=3$일 때, $x^2-3x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

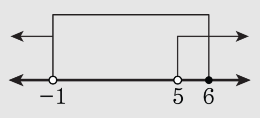
따라서, 주어진 방정식의
두 허근이 $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로
두 허근 $\alpha,\ \beta$의 합은
$\alpha+\beta=1$이다.

18. 두 부등식 $-x^2 + 4x + 5 < 0$,
$x^2 + ax - b \le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $5 < x \le 6$일 때, $a + b$의 값은?

① -1　② 1　③ -11　④ 11　⑤ 5

해설

$x^2 - 4x - 5 > 0$
$(x+1)(x-5) > 0$
$x < -1$ 또는 $x > 5$
$x^2 + ax - b \le 0$
$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta) \le 0$ 라 하자
$\alpha \le x \le \beta$
이제 주어진 조건에 만족하려면



$\therefore \alpha = -1, \beta = 6$
$\Rightarrow (x+1)(x-6) = x^2 - 5x - 6$
$a = -5, b = 6, a + b = 1$

19. 다음 조건을 만족시키는 $z_1,\ z_2,\ z_3$에 대하여 이것을 근으로 갖는 삼차방정식을 구하면? (단, $z_i(i=1,\ 2,\ 3)$는 복소수, $z=\alpha+\beta i$일 때, $|z|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$)

$\lvert z_1\rvert=\lvert z_2\rvert=\lvert z_3\rvert=1,\ z_1+z_2+z_3=1,\ z_1z_2z_3=1$

① $x^3-x^2+x-1=0$ ② $x^3-x^2+2x-1=0$
③ $x^3-x^2-x-1=0$ ④ $x^3-x^2-2x-1=0$
⑤ $2x^3-2x^2-x-2=0$

해설

$z_1=\alpha+\beta i$라고 하면 $\bar{z}_1=\alpha-\beta i$

$$\begin{aligned} z_1\bar{z}_1 &= (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) \\ &= \alpha^2+\beta^2=|z_1|^2=1 \end{aligned}$$

마찬가지로 풀면 $z_2\bar{z}_2=1,\ z_3\bar{z}_3=1$이므로

$$\begin{aligned} z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 &= \frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2} \\ &= \bar{z}_3+\bar{z}_1+\bar{z}_2 \\ &= \overline{z_1+z_2+z_3}=1 \\ &(\because\ z_1z_2z_3=1) \end{aligned}$$

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여
z_1, z_2, z_3를 근으로 갖는 방정식은
$x^3-x^2+x-1=0$

20. 560 개의 제품을 적당히 나누어 창고에 보관하려고 한다. 제품을 22 개씩 보관하면 창고가 모자라고 24 개씩 보관하면 모든 제품을 보관할 수 있다. 만약 제품에 불량으로 인해 창고에 보관할 필요가 없게 된 제품이 60 개 발생하면 22 개씩 보관하더라도 창고의 개수를 2 개 더 줄일 수 있다. 창고의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 25 개

해설

창고의 개수를 x 개라 하면

$22x < 560 < 24x$

$22(x-2) \geq 500$

연립하여 계산하면

$\frac{272}{11} \leq x < \frac{280}{11}$

$24.72... \leq x < 25.45...$

따라서 창고의 개수는 25 개이다.