1. 다항식 $2x^3+ax^2+bx+8$이 $x-1$과 $x-2$로 각각 나누어 떨어지도록 하는 상수 $a,\ b$의 값은?

① $a=-2,\ b=-8$
② $a=3,\ b=4$
③ $a=-1,\ b=-3$
④ $a=4,\ b=-2$
⑤ $a=-3,\ b=7$

해설

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+8$로 놓으면
$x-1$과 $x-2$로 각각 나누었을 때 나머지가 0이므로 $f(1)=0,\ f(2)=0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=2+a+b+8=0,$
$f(2)=16+4a+2b+8=0$

$\therefore\ a+b=-10,\ 2a+b=-12$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=-8$

2. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, a, b, c를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$ ② $-1,\ 1,\ 2$ ③ $-2,\ -1,\ 1$

④ $-1,\ -1,\ -2$ ⑤ $-1,\ 2$

해설

$$x^2-2x-y^2+2y=(x+y)(x-y)-2(x-y)$$
$$=(x-y)(x+y-2)$$

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

3. a, b가 실수일 때, $(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$을 만족하는 a, b의 값의 합은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(a+2i)(3+4i)+5(1-bi)=0$에서
$(3a-3)+(4a-5b+6)i=0$
a, b가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3a-3=0$, $4a-5b+6=0$
$\therefore\ a=1,\ b=2$
따라서 $a+b=3$ 이다.

4. $2|x-1|+x-4=0$의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -2

해설

i) $x<1$일 때,

$-2(x-1)+(x-4)=0$

$\therefore x=-2$

ii) $x \geq 1$일 때,

$2(x-1)+x-4=0$

$\therefore x=2$

따라서 구하는 해는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 이다.

5. x 에 대한 이차함수 $y=x^2-4kx+5k^2-5k+7$ 에 대하여 y 가 최소가 되도록 하는 x 의 값과 그 때의 y 의 값으로 옳은 것은?

① $x=k,\ y=k^2+k+2$

② $x=k,\ y=k^2-3k+4$

③ $x=2k,\ y=k^2+4k+1$

④ $x=2k,\ y=k^2-5k+7$

⑤ $x=3k,\ y=2k^2-3k+6$

해설

$y=x^2-4kx+5k^2-5k+7$

$=(x-2k)^2+k^2-5k+7$ 이므로

주어진 이차함수는 $x=2k$ 일 때

최솟값 k^2-5k+7 을 갖는다.

따라서, 구하는 x, y 의 값은

$x=2k,\ y=k^2-5k+7$

6. 그래프의 모양이 $y = -2x^2$ 과 같고 $x = 1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y = -2x^2 - 4x + 4$

② $y = -2x^2 - 4x + 5$

③ $y = -2x^2 + 4x - 3$

④ $y = -2x^2 + 4x + 3$

⑤ $y = -2x^2 - x + 5$

해설

꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 5)$, x^2 의 계수가 -2 이므로

$$\begin{aligned} y &= -2(x-1)^2 + 5 \\ &= -2(x^2 - 2x + 1) + 5 \\ &= -2x^2 + 4x + 3 \end{aligned}$$

$\therefore y = -2x^2 + 4x + 3$

7. 다음 $\square$ 안에 알맞은 수를 차례대로 써 넣어라.

$$(x^3+4x^2+3x-2)\div(\square x^2+\square x+\square)=x+2$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : -1

해설

$\square x^2+\square x+\square = A$라 하면

$(x^3+4x^2+3x-2)\div A=x+2$

$\therefore\ A=(x^3+4x^2+3x-2)\div(x+2)$

$\therefore\ A=x^2+2x-1$이므로

$\square$안에 알맞은 수는 차례대로 1, 2, -1이다.

8. 다항식 $f(x)$에 대하여, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$일 때, $f(x)$ 를 $(2x-1)(3x-1)$로 나눈 나머지를 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12x-3$

해설

구하는 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x) = (2x-1)(3x-1)Q(x) + ax + b$

$x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$을 각각 양변에 대입하면

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a + b = 3$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a + b = 1$

두 식을 연립하여 풀면 $\frac{1}{6}a = 2 \Rightarrow a = 12, b = -3$

$\therefore$구하는 나머지는 $12x-3$

9. $1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^6}+\frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^8}$$
$$=\{1+(-i)+(-1)+i\}+\{1+(-i)+(-1)+i\}+1$$
$$=1$$

10. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2am - 2m + b$의 그래프가 m의 값에 관계없이 x축에 접할 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 4　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2 - 2ax + 2am - 2m + b = 0$에서

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2am - 2m + b) = 0$$

$\therefore a^2 - 2am + 2m - b = 0$

이 식이 m의 값에 관계없이 성립하므로

$(2 - 2a)m + (a^2 - b) = 0$에서

$2 - 2a = 0,\ a^2 - b = 0$

따라서 $a = 1,\ b = 1$이므로 $ab = 1$

11. $x = \dfrac{3+i}{1-i}$ 일 때, $x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $4 - 10i$ ② $-3 - 10i$ ③ $-4 + 10i$

④ $4 + 10i$ ⑤ $3 + 10i$

해설

$$x = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

$$x^2 = (1+2i)^2 = -3 + 4i$$

$$x^3 = (-3+4i)(1+2i) = -11 - 2i$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 4 = (-11-2i) - 3(-3+4i) + 2(1+2i) + 4 = 4 - 10i$$

해설

$x = \dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2+4i}{2} = 1 + 2i$ 에서 $x - 1 = 2i$

$(x-1)^2 = (2i)^2 = -4$

$x^2 - 2x + 5 = 0,$

$x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

$= x(x^2 - 2x + 5) - x^2 - 3x + 4$

$= -(2x - 5) - 3x + 4$

$= -5x + 9 = -5(1 + 2i) + 9$

$= 4 - 10i$

12. $2xy = x^2$, $2xy = y^2 - y$를 동시에 만족하는 $(x,\ y)$의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$$\begin{cases} 2xy = x^2 & \cdots ㉠ \\ 2xy = y^2 - y & \cdots ㉡ \end{cases}$$

라 하면 ㉠에서 $x = 0$ 또는 $x = 2y$

(i) $x = 0$일 때;

㉡에서 $y^2 - y = 0$

$\therefore\ y = 0, 1$

(ii) $x = 2y$일 때;

㉡에서 $4y^2 = y^2 - y$

$\therefore\ y = 0, -\dfrac{1}{3}$

$\therefore = (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

13. x의 이차방정식 $mx^2 + 2(1-2m)x + m = 0$이 서로 다른 두 실근을 가질 m의 범위를 구하면?

① $0 < m < \frac{1}{3}$

② $m < \frac{1}{3},\ \ m > 1$

③ $m < 0,\ \ 0 < m < \frac{1}{3},\ \ m > 1$

④ $m < 0\ ,\ m > 1$

⑤ $\frac{1}{3} < m < 1$

해설

이차방정식이므로 $m \neq 0 \quad \cdots$ ㉠

$\frac{D}{4} = (1-2m)^2 - m^2 > 0$에서

$(m-1)(3m-1) > 0,\ \ m < \frac{1}{3},\ \ m > 1 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $m < 0,\ \ 0 < m < \frac{1}{3},\ \ m > 1$

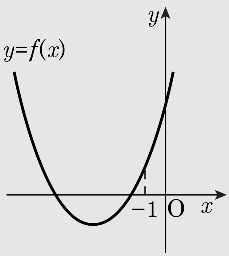
14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2kx + 6 - k = 0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ________ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x) = x^2 - 2kx + 6 - k$ 라 하면
방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\frac{D}{4} = (-k)^2 - (6-k) > 0$ 에서
$k^2 + k - 6 > 0,\ (k+3)(k-2) > 0$
$\therefore\ k < -3$ 또는 $k > 2$

(ii) $f(-1) = 1 + 2k + 6 - k > 0$ 에서 $k > -7$

(iii) $-\frac{-2k}{2} < -1$ 에서 $k < -1$
이상에서 $-7 < k < -3$
따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

15. x^4-6x^2+1을 인수분해 하였더니 $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$가 되었다. 이 때, $a+b+c+d$의 값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

$x^4-6x^2+1=(x^4-2x^2+1)-4x^2$

$=(x^2-1)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x-1)(x^2-2x-1)$

$=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$

$\therefore\ a+b+c+d=-2$

16. α, β가 x에 관한 이차방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$의 두 근일 때, 다음 방정식의 근은?

$$(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$$

① $\alpha,\ \beta$　② $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}$　③ $p,\ q$

④ $\frac{1}{p},\ \frac{1}{q}$　⑤ $-p,\ -q$

해설

방정식 $(x+p)(x+q)-k=0$을 정리하면

$x^2+(p+q)x+(pq-k)=0$

이 방정식의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=-(p+q),\ \alpha\beta=pq-k \cdots$ ㉮

방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+k=0$을 정리하면

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+k=0$

$\therefore\ x^2+(p+q)x+pq=0$ ($\because$ ㉮ 대입)

$\therefore\ (x+p)(x+q)=0$

따라서 구하는 두 근은 $x=-p,\ -q$

17. 오차방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$의 허근을 α ,β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

방정식 $x^5-3x^4+x^3+x^2-3x+1=0$에서

$(x+1)(x^4-4x^3+5x^2-4x+1)=0$

$\therefore\ x+1=0$ 또는

$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$

(i) $x+1=0$에서 $x=-1$

(ii) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\left(s^2+\frac{1}{x^2}\right)-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5$$

$$=0\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=0$$

이 때, $x+\frac{1}{x}=t$로 치환하면

$t^2-4t+3=0$, $(t-1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

①$x+\frac{1}{x}=1$일 때, $x^2-x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

②$x+\frac{1}{x}=3$일 때, $x^2-3x+1=0$

$$\therefore\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$이므로

두 허근 α, β의 합은

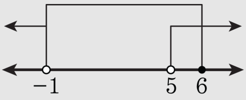
$\alpha+\beta=1$이다.

18. 두 부등식 $-x^2+4x+5<0$,
$x^2+ax-b \le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $5<x\le 6$일 때, $a+b$의 값은?

① -1　② 1　③ -11　④ 11　⑤ 5

해설

$x^2-4x-5>0$
$(x+1)(x-5)>0$
$x<-1$ 또는 $x>5$
$x^2+ax-b\le 0$
$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)\le 0$ 라 하자
$\alpha \le x \le \beta$
이제 주어진 조건에 만족하려면



$\therefore \alpha=-1, \beta=6$
$\Rightarrow (x+1)(x-6)=x^2-5x-6$
$a=-5, b=6, a+b=1$

19. 다음 조건을 만족시키는 z_1, z_2, z_3에 대하여 이것을 근으로 갖는 삼차방정식을 구하면? (단, $z_i(i = 1, 2, 3)$는 복소수, $z = \alpha + \beta i$일 때, $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$)

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1,\ z_1 + z_2 + z_3 = 1,\ z_1 z_2 z_3 = 1$$

① $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$
② $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$
③ $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$
④ $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$
⑤ $2x^3 - 2x^2 - x - 2 = 0$

해설

$z_1 = \alpha + \beta i$라고 하면 $\overline{z}_1 = \alpha - \beta i$

$$\begin{aligned} z_1\overline{z}_1 &= (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 = |z_1|^2 = 1 \end{aligned}$$

마찬가지로 풀면 $z_2\overline{z}_2 = 1,\ z_3\overline{z}_3 = 1$이므로

$$\begin{aligned} z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 &= \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \\ &= \overline{z}_3 + \overline{z}_1 + \overline{z}_2 \\ &= \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1 \\ &(\because\ z_1z_2z_3 = 1) \end{aligned}$$

따라서 근과 계수와의 관계에 의하여

z_1, z_2, z_3를 근으로 갖는 방정식은

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

20. 560 개의 제품을 적당히 나누어 창고에 보관하려고 한다. 제품을 22 개씩 보관하면 창고가 모자라고 24 개씩 보관하면 모든 제품을 보관할 수 있다. 만약 제품에 불량으로 인해 창고에 보관할 필요가 없게 된 제품이 60 개 발생하면 22 개씩 보관하더라도 창고의 개수를 2 개 더 줄일 수 있다. 창고의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 25 개

해설

창고의 개수를 x 개라 하면

$$22x < 560 < 24x$$

$$22(x-2) \geq 500$$

연립하여 계산하면

$$\frac{272}{11} \leq x < \frac{280}{11}$$

$24.72... \leq x < 25.45...$

따라서 창고의 개수는 25 개이다.