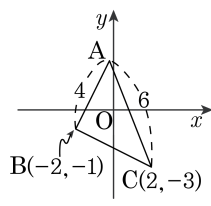


1. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\overline{AC} = 6$, $B(-2, -1)$, $C(2, -3)$ 이고 점 A에서 $\overline{BC}$ 에 선을 그었을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 점을 D라 하자. 선분 AD의 길이는?



- ① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$
 ④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{21}$

해설

점 D가 $\overline{BC}$ 의 중점일 때 $\triangle ABD = \triangle ACD$ 가 되어 넓이를 이등분한다.

이 때, 점 D의 좌표는 $D\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{-1-3}{2}\right)$

$\therefore D(0, -2)$

또, $\overline{BD} = \sqrt{(0+2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{5}$ 이고

점 D가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로

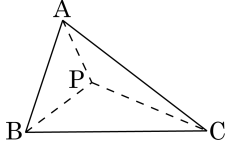
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)$ 이 성립한다.

즉, $4^2 + 6^2 = 2(\overline{AD}^2 + 5)$

$\overline{AD}^2 + 5 = 26$, $\overline{AD}^2 = 21$

$\therefore AD = \sqrt{21}$

2. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P를 잡았더니 $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 5$ 가 되었다고 한다. 이때, 선분 BC의 길이는?



- ① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$ 의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다. 따라서 $\overline{AP}$ 의 연장선과 $\overline{BC}$ 의 교점을 D라 하면

$$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$$

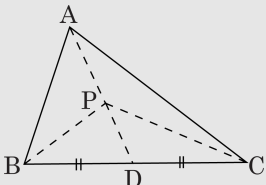
$$\therefore \overline{PD} = 2$$

$\triangle PBC$ 에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2)$$

$$3^2 + 5^2 = 2(2^2 + \overline{BD}^2)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13}, \overline{BC} = 2\overline{BD} = 2\sqrt{13}$$



3. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$ 라 할 때, $f(x)$ 의 최솟값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E까지의 거리 $f(x)$ 는
 $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1| + |x - 3| + |x - 5|$

(i) $x < -1$, $f(x) = -x - 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -5x + 8$
(ii) $-1 \leq x < 0$, $f(x) = x + 1 - x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -3x + 10$
(iii) $0 \leq x < 1$, $f(x) = x + 1 + x - x + 1 - x + 3 - x + 5 = -x + 10$
(iv) $1 \leq x < 3$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 - x + 3 - x + 5 = x + 8$
(v) $3 \leq x < 5$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 - x + 5 = 3x + 2$
(vi) $5 \leq x$, $f(x) = x + 1 + x + x - 1 + x - 3 + x - 5 = 5x - 8$

이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x = 1$ 인 경우 $f(x)$ 는 최솟값을 갖는다.
 $\therefore f(1) = |1 + 1| + |1| + |1 - 1| + |1 - 3| + |1 - 5| = 9$

4. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x 축 위에 있을 때, $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하면?

① 4 ② $4\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

해설

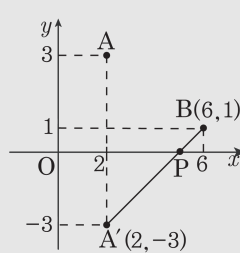
(2, 3)을 x 축에 대해

대칭이동한 점을

A'(2, -3)라 하면

최단거리는 $\overline{A'B}$ 의 길이

$$\therefore \sqrt{(2-6)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

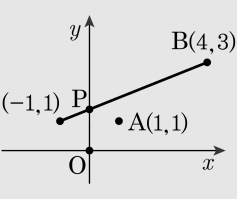


5. 두 점 A(1, 1), B(4, 3)가 있을 때, y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 가 최소가 되도록 점 P의 y좌표를 구하면?

- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

구하는 거리의 합의 최솟값은 한 점을 y축에 대칭이동한 점과 다른 점 사이의 거리와 같다. (-1, 1)과 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식을 구한 후, y절편을 찾는다.



$$y - 3 = \frac{3 - 1}{4 - (-1)}(x - 4), y = \frac{2}{5}x - \frac{8}{5} + 3$$

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$$

P의 y좌표는 $\frac{7}{5}$

6. 두 점 A(2, -1), B(6, 3) 에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점을 P, y 축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle OPQ$ 의 외심의 좌표를 (x , y)라 할 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

P(a , 0), Q(0, b)라 하면

$$(2-a)^2 + (-1-0)^2 = (6-a)^2 + (3-0)^2 \cdots \textcircled{A}$$

$$(2-0)^2 + (-1-b)^2 = (6-0)^2 + (3-b)^2 \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$ 에서 $a = 5$, $\textcircled{B}$ 에서 $b = 5$

$\triangle OPQ$ 의 외심을 (x , y)라 하면

$$x^2 + y^2 = (x-5)^2 + y^2 = x^2 + (y-5)^2$$

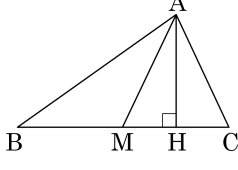
$$\therefore -10x + 25 = 0, -10y + 25 = 0$$

$$\therefore x = y = \frac{5}{2}$$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$\therefore x + y = 5$$

7. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$ 이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.

직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(가)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(나)}}^2 \cdots \text{㉠}\end{aligned}$$

직각삼각형 AHC에서

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(다)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM} \cdot \overline{MH} + \boxed{\text{(라)}}^2 \cdots \text{㉡}\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$ 이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

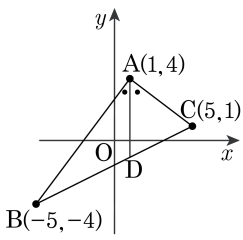
④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

8. 다음 그림과 같이 세 점 $A(1, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(5, 1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



- ① $1 : 1$ ② $\sqrt{2} : 1$ ③ $\sqrt{3} : 1$
 ④ $2 : 1$ ⑤ $\sqrt{5} : 1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
 각의 이등분선정리에 의해

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2}}{\sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = 2 : 1$$

9. 두 점 A (-3, 4), B (2, 6)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P와 y 축 위의 점 Q의 좌표는?

- ① $P\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{4}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{4}\right)$
③ $P\left(-\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ④ $P\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{7}{4}\right)$
⑤ $P\left(\frac{5}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 $P(a, 0)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(a+3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (-6)^2}$$

Q의 좌표를 $Q(0, b)$ 라 하면

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서

$$\sqrt{3^2 + (b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (b-6)^2}$$

두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2}, b = \frac{15}{4}$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{4}\right)$$

10. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0) 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$$\overline{AB}^2 = (0 - 2)^2 + (a - 3)^2 = a^2 - 6a + 13$$

$$\overline{BC}^2 = (2 - 1)^2 + (3 - 0)^2 = 10$$

$$\overline{AC}^2 = (0 - 1)^2 + (a - 0)^2 = a^2 + 1$$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 - 6a + 13 = 10 \text{ 즉 } a^2 - 6a + 3 = 0$$

$$\therefore a = 3 \pm \sqrt{6}$$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 + 1 = 10 \text{ 즉 } a^2 = 9$$

$$\therefore a = \pm 3$$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 에서

$$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13 \text{ 즉 } 6a = 12$$

$$\therefore a = 2$$

$a = -3$ 이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a

의 값의 합은

$$(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$$

11. $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$ 이고, $\overline{BC}$ 의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$ 일 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2) \text{ 이므로}$$

$$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$$

$$\therefore x = \pm 6$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = 6$$

12. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 A(2, 4), B(0, 2)로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

점 P의 좌표를 (a, a) 으로 놓으면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\sqrt{(a-2)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{a^2 + (a-2)^2}$
양변 제곱하여 정리하면
 $2a^2 - 12a + 20 = 2a^2 - 4a + 4, 8a = 16$
 $\therefore a = 2$
따라서 점 P의 좌표는 (2, 2)이므로 다음 그림에서
(□ABOP의 넓이)
= (△OBP의 넓이) + (△ABP의 넓이)
= $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$

13. 좌표평면 위에 세 지점 P(1, 5), Q(-2, -4), R(5, 3)이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

- ① (0, -1)
- ② (0, 0)
- ③ (0, 1)
- ④ (1, 0)
- ⑤ (1, 1)

해설

A(a, b)라고 하면
 $(a - 1)^2 + (b - 5)^2 = \overline{AP}^2 \quad \dots \quad \textcircled{1}$
 $(a + 2)^2 + (b + 4)^2 = \overline{AQ}^2 \quad \dots \quad \textcircled{2}$
 $(a - 5)^2 + (b - 3)^2 = \overline{AR}^2 \quad \dots \quad \textcircled{3}$
 $\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 = \overline{AR}^2$ 이므로
①, ② 연립하면 $a + 3b = 1$
①, ③ 연립하면 $2a - b = 2$
 $\therefore a = 1, b = 0$
 $\therefore (1, 0)$
 $\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

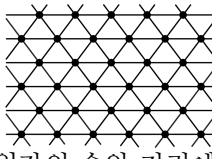
14. 좌표평면 위의 두 점 A(4, 3), B(1, 3)이 있다. 점 A에서 x 축 위의 점과 y 축 위의 점을 각각 지나 점 B에 이르는 최단 거리는?

- ① 5 ② 7 ③ $\sqrt{53}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{75}$

해설

점 A의 x 축에 대한 대칭점을 A', 점 B의 y 축에 대한 대칭점을 B'
두 점 A', B'을 지나는 직선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 P, Q 라고 하면
 $AP = A'P$, $BQ = B'Q$
주어진 조건을 만족하는 최단 거리는 두 점 A'(4, -3), B'(-1, 3) 사이의 거리이다.
 $\therefore A'B' = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{61}$

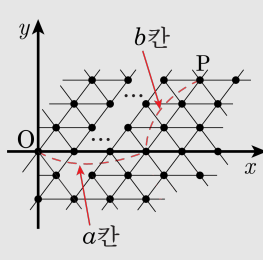
15. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 다음 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?



- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

다음 그림과 같이 좌표축을 잡아서
점 O 에서 우측으로 a 칸
위상쪽으로 b 칸 이동한 점 P 를 생각
하자.



$$\begin{aligned} \text{이 때 } \overline{OP}^2 &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 \\ &= a^2 + ab + b^2 = 7 \end{aligned}$$

$$4a^2 + 4ab + 4b^2 = (2a+b)^2 + 3b^2 = 28$$

가능한 $3b^2 = 0, 3, 12, 27$ 일 때

$$(2a+b)^2 = 28, 25, 16, 1$$