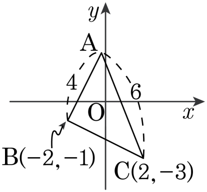
1. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=6$, $B(-2,\ -1)$, $C(2,\ -3)$ 이고 점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 선을 그었을 때, $\triangle ABC$ 의 넓이를 이등분하는 점을 D 라 하자. 선분 AD 의 길이는?



① 4　② $\sqrt{17}$　③ $3\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{5}$　⑤ $\sqrt{21}$

해설

점 D 가 $\overline{BC}$ 의 중점일 때

$\triangle ABD=\triangle ACD$ 가 되어 넓이를 이등분한다.

이 때, 점 D 의 좌표는 $D\left(\dfrac{-2+2}{2},\ \dfrac{-1-3}{2}\right)$

$\therefore\ D(0,\ -2)$

또, $\overline{BD}=\sqrt{(0+2)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{5}$ 이고

점 D 가 $\overline{BC}$ 의 중점이므로

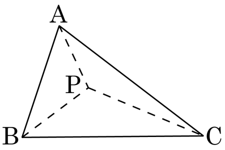
$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)$ 이 성립한다.

즉, $4^2+6^2=2(\overline{AD}^2+5)$

$\overline{AD}^2+5=26$, $\overline{AD}^2=21$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{21}$

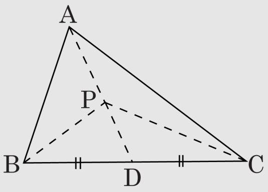
2. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P를 잡았더니 $\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$, $\overline{CP} = 5$가 되었다고 한다. 이 때, 선분 BC의 길이는?



① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다.
따라서 $\overline{AP}$의 연장선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라 하면



$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$

$\therefore \overline{PD} = 2$

$\triangle PBC$에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\left(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$3^2 + 5^2 = 2\left(2^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13},\ \overline{BC} = 2 \cdot \overline{BD} = 2\sqrt{13}$$

3. 수직선 위의 5개의 정점 A(-1), B(0), C(1), D(3), E(5)와 동점 P(x)에 대하여 점 P 에서 5개의 정점 A, B, C, D, E까지의 거리의 합을 $f(x)$라 할 때, $f(x)$의 최솟값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

수직선 위에 임의의 동점 P(x)를 잡으면
점 P에서 정점 A, B, C, D, E 까지의 거리 $f(x)$는
$f(x) = |x+1| + |x| + |x-1| + |x-3| + |x-5|$

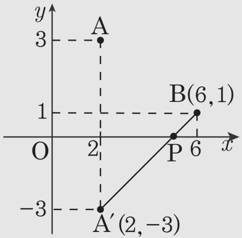
(i) $x < -1$, $f(x) = -x-1-x-x+1-x+3-x+5 = -5x+8$
(ii) $-1 \le x < 0$, $f(x) = x+1-x-x+1-x+3-x+5$
$= -3x+10$
(iii) $0 \le x < 1$, $f(x) = x+1+x-x+1-x+3-x+5 = -x+10$
(iv) $1 \le x < 3$, $f(x) = x+1+x+x-1-x+3-x+5 = x+8$
(v) $3 \le x < 5$, $f(x) = x+1+x+x-1+x-3-x+5 = 3x+2$
(vi) $5 \le x$, $f(x) = x+1+x+x-1+x-3+x-5 = 5x-8$
이므로
(i)~(vi)의 그래프에서 $x=1$ 인 경우 $f(x)$는 최솟값을 갖는다.
$\therefore\ f(1) = |1+1| + |1| + |1-1| + |1-3| + |1-5| = 9$

4. 두 점 A(2, 3), B(6, 1)이 있다. 점 P가 x축 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값을 구하면?

① 4　② $4\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $4\sqrt{3}$

해설

(2, 3)을 x축에 대해
대칭이동한 점을
A′(2, −3)라 하면
최단거리는 $\overline{\mathrm{A'B}}$의 길이
$\therefore\ \sqrt{(2-6)^2+(-3-1)^2} = \sqrt{32} =$
$4\sqrt{2}$

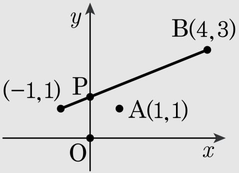


5. 두 점 A(1, 1), B(4, 3)가 있을 때, y축 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소가 되도록 점 P의 y좌표를 구하면?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

해설

구하는 거리의 합의 최솟값은 한 점을 y축에 대칭이동한 점과 다른 점 사이의 거리와 같다. (−1, 1)과 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식을 구한 후, y절편을 찾는다.



$$y-3=\frac{3-1}{4-(-1)}(x-4),\ y=\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}+3$$

$$y=\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}$$

P의 y좌표는 $\frac{7}{5}$

6. 두 점 $\mathrm{A}(2, -1)$, $\mathrm{B}(6, 3)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, $\triangle\mathrm{OPQ}$의 외심의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.(단, O는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$\mathrm{P}(a, 0)$, $\mathrm{Q}(0, b)$라 하면

$(2-a)^2+(-1-0)^2=(6-a)^2+(3-0)^2 \cdots$ ㉠

$(2-0)^2+(-1-b)^2=(6-0)^2+(3-b)^2 \cdots$ ㉡

㉠에서 $a=5$, ㉡에서 $b=5$

$\triangle\mathrm{OPQ}$의 외심을 (x, y)라 하면

$x^2+y^2=(x-5)^2+y^2=x^2+(y-5)^2$

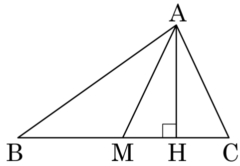
$\therefore\ -10x+25=0,\ -10y+25=0$

$\therefore\ x=y=\dfrac{5}{2}$

따라서 외심의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$

$\therefore\ x+y=5$

7. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.
직각삼각형 ABH에서
$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\ (가)\ }^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM}\cdot\overline{MH} + \boxed{\ (나)\ }^2 \quad \cdots ㉠\end{aligned}$$
직각삼각형 AHC 에서
$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\ (다)\ }^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM}\cdot\overline{MH} + \boxed{\ (라)\ }^2 \quad \cdots ㉡\end{aligned}$$
㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC}+\overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH}-\overline{BM}$

② (가) $\overline{BC}+\overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH}-\overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM}+\overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH}-\overline{BM}$

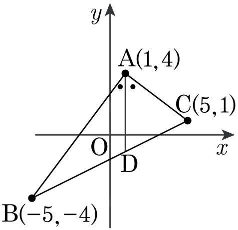
④ (가) $\overline{BM}+\overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM}-\overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM}+\overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM}-\overline{MH}$

해설

생략

8. 다음 그림과 같이 세점 $A(1,4)$, $B(-5,-4)$, $C(5,1)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



① $1:1$ ② $\sqrt{2}:1$ ③ $\sqrt{3}:1$

④ $2:1$ ⑤ $\sqrt{5}:1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD}:\overline{CD}$이고

각의 이등분선정리에 의해

$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2}=\sqrt{100}=10$

$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore\ \triangle ABC : \triangle ACD = 2 : 1$

9. 두 점 A $(-3,\ 4)$, B $(2,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표는?

① $P\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
② $P\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
③ $P\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ $P\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{7}{4}\right)$
⑤ $P\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $Q\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 P $(a,\ 0)$라 하면
$\overline{AP}=\overline{BP}$ 이므로
$\sqrt{(a+3)^2+(-4)^2}=\sqrt{(a-2)^2+(-6)^2}$
Q의 좌표를 Q $(0,\ b)$라 하면
$\overline{AQ}=\overline{BQ}$에서
$\sqrt{3^2+(b-4)^2}=\sqrt{(-2)^2+(b-6)^2}$
두 식을 제곱하여 정리하면 $a=\frac{3}{2},\ b=\frac{15}{4}$
$\therefore P\left(\frac{3}{2},\ 0\right),\ Q\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

10. 평면 위에 세 점 $A(0,\ a)$, $B(2,\ 3)$, $C(1,\ 0)$ 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 7　　② 8　　③ 9　　④ 10　　⑤ 11

해설

$\overline{AB}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{BC}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{AC}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$
$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서
$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ 에서
$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$
$\therefore\ a = 2$

$a = -3$ 이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a의 값의 합은
$(3+\sqrt{6}) + (3-\sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$

11. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = 8$, $\overline{AC} = x$이고, $\overline{BC}$의 중점을 M이라 할 때, $\overline{BM} = 7$, $\overline{AM} = 1$일 때, x의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x = 6$

해설

파포스의 정리에 의하여

$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$이므로

$8^2 + x^2 = 2(7^2 + 1^2)$

$\therefore\ x = \pm 6$

$x > 0$이므로 $x = 6$

12. 직선 $y = x$ 위의 점 P가 두 점 A$(2, 4)$, B$(0, 2)$로부터 같은 거리에 있을 때, 사각형 ABOP의 넓이는? (단, O는 원점)

① 2　　② 4　　③ 6　　④ 8　　⑤ 10

해설

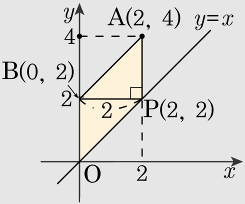
점 P의 좌표를 $(a,\ a)$으로 놓으면

$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$에서 $\sqrt{(a-2)^2+(a-4)^2} = \sqrt{a^2+(a-2)^2}$

양변 제곱하여 정리하면

$2a^2-12a+20 = 2a^2-4a+4$, $8a = 16$

$\therefore\ a = 2$



따라서 점 P의 좌표는 $(2,\ 2)$이므로 다음 그림에서

($\square$ABOP의 넓이)

$=$ ($\triangle$OBP의 넓이) $+$ ($\triangle$ABP의 넓이)

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 + \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 4$

13. 좌표평면 위에 세 지점 $\mathrm{P}(1,5)$, $\mathrm{Q}(-2,-4)$, $\mathrm{R}(5,3)$이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0,-1)$ ② $(0,0)$ ③ $(0,1)$

④ $(1,0)$ ⑤ $(1,1)$

해설

$\mathrm{A}(a,\ b)$라고 하면

$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{\mathrm{AP}}^2 \quad \cdots$ ①

$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{\mathrm{AQ}}^2 \quad \cdots$ ②

$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{\mathrm{AR}}^2 \quad \cdots$ ③

$\overline{\mathrm{AP}^2}=\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AR}}^2$이므로

①, ② 연립하면 $a+3b=1$

①, ③ 연립하면 $2a-b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ (1,\ 0)$

$\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

14. 좌표평면 위의 두 점 A(4, 3), B(1, 3)이 있다. 점 A에서 x축 위의 점과 y축 위의 점을 각각 지나 점 B에 이르는 최단 거리는?

① 5 ② 7 ③ $\sqrt{53}$ ④ $\sqrt{61}$ ⑤ $\sqrt{75}$

해설

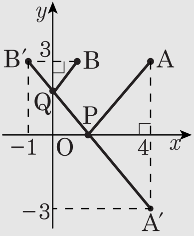
점 A의 x축에 대한 대칭점을 A′, 점 B의 y축에 대한 대칭점을 B′

두 점 A′, B′을 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면

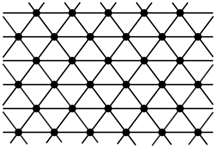
$\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}} = \overline{\mathrm{B'Q}}$

주어진 조건을 만족하는 최단 거리는 두 점 A′(4, −3), B′(−1, 3) 사이의 거리이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{A'B'}} = \sqrt{(4+1)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{61}$



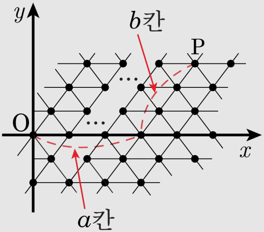
15. 어떤 물질은 원자를 구로 나타낼 경우 똑같은 구들을 규칙적으로 배열하여 얻은 정육각형 격자구조를 갖는다. 다음 그림은 이 격자구조의 한 단면에 놓여있는 원자의 중심을 연결한 것이다. 이 구조에서 한 원자의 에너지는 인접한 원자의 수와 거리에 영향을 받는다. 가장 인접한 원자의 중심간의 거리가 모두 1일 때, 동일 평면상에서 고정된 한 원자와 중심사이의 거리가 $\sqrt{7}$ 인 원자의 개수는?



① 4 ② 6 ③ 8 ④ 12 ⑤ 16

해설

다음 그림과 같이 좌표축을 잡아서
점 O 에서 우측으로 a 칸
우상쪽으로 b 칸 이동한 점 P 를 생각하자.



이 때 $\overline{\mathrm{OP}}^2 = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2$

$= a^2+ab+b^2 = 7$

$4a^2+4ab+4b^2 = (2a+b)^2+3b^2 = 28$

가능한 $3b^2 = 0, 3, 12, 27$ 일 때

$(2a+b)^2 = 28, 25, 16, 1$