1. 이차함수 $y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x)$ 가 $x = p$ 에서 최소이고 최솟값은 q 일 때, $p + q$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{17}{3}$　② $-\frac{5}{3}$　③ 0　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$y = 12x - (1 + 3x)(1 - 3x) = 9x^2 + 12x - 1$

$= 9\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}\right) - 5 = 9\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - 5$

따라서, $x = -\frac{2}{3}$ 일 때 최소이고

최솟값은 -5 이므로

$p = -\frac{2}{3}$, $q = -5$

$\therefore p + q = -\frac{17}{3}$

2. 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ 의 최솟값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 2

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ 에서
$x = 1$ 일 때 최소이며 최솟값은 $f(1) = 1$

3. 이차함수 $y = -x^2 + 4x - 3$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$
최댓값 $m = 1$
$y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = \frac{1}{3}(x+3)^2$
최솟값 $n = 0$
$\therefore mn = 1 \times 0 = 0$

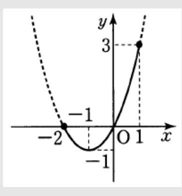
4. $-2 \le x \le 1$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2x$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x) = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, $-2 \le x \le 1$ 에서
$y = f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같다.
즉, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(1) = 3$
따라서, $x = 1$ 일 때 최댓값 3,
$x = -1$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로
구하는 합은 $3 - 1 = 2$



5. 방정식 $2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -1$ (중근), $-\frac{1}{2}$, 2　　② $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 1

③ $x = -1$ (중근), $\frac{1}{2}$, 2　　④ $x = -1$, $\frac{1}{2}$, 2 (중근)

⑤ $x = -1$, $\frac{1}{2}$ (중근), 2

해설

$f(x) = 2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2$ 라 하면 $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로 $(x+1)(x-2)$ 를 인수로 갖는다.

	2	−1	−6	−1	2
−1		−2	3	3	−2
	2	−3	−3	2	0
2		4	2	−2	
	2	1	−1	0	

조립제법에 의하면 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(2x^2 + x - 1) = 0$

$(x+1)^2(x-2)(2x-1) = 0$

$\therefore\ x = -1,\ \frac{1}{2},\ 2$

6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

7. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값을 고르면?

① -14 ② 14 ③ -5 ④ 5 ⑤ 4

해설

$y = x^2 - 6x - 5$
$= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5$
$= (x-3)^2 - 14$

따라서 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

8. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값은?

① -14 ② 14 ③ -5 ④ 5 ⑤ 4

해설

$y = x^2 - 6x - 5$
$= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5$
$= (x - 3)^2 - 14$
$\therefore x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

9. 이차함수 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 가 $x = -1$ 에서 최댓값 7 을 갖고, $f(2) = -2$ 를 만족할 때, 상수 $a + b + c$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 7 ③ 11 ④ −3 ⑤ −5

해설

$f(x) = a(x+1)^2 + 7, f(2) = -2$
$\Rightarrow 3^2 \times a + 7 = -2, a = -1$
$\therefore\ f(x) = -(x+1)^2 + 7 = -x^2 - 2x + 6$
따라서 $a + b + c = 3$

10. 이차함수 $y = -3x^2 - 6x + k$ 의 최댓값이 $\frac{5}{2}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하면?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$y = -3x^2 - 6x + k = -3(x^2 + 2x + 1) + k + 3 = -3(x+1)^2 + k + 3$
이므로 꼭짓점의 좌표는 $(-1, k+3)$ 이다.
주어진 함수는 위로 볼록한 함수이므로 꼭짓점의 y 의 값이 최댓값이 된다.
$\therefore\ k + 3 = \frac{5}{2}$ $\therefore\ k = -\frac{1}{2}$

11. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서

$x^2 = t$ 로 놓으면

$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$

$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$

(ⅰ) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$

$\therefore\ x = \pm 2$

(ⅱ) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$

$\therefore\ x = \pm 3$

따라서 모든 해의 합은

$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

12. 삼차방정식 $2x^3-7x^2+11x+13=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라고 할 때, 다음 (가), (나), (다)에 알맞은 값을 차례로 쓴 것은?

(가) $\alpha+\beta+\gamma$
(나) $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$
(다) $\alpha\beta\gamma$

① $\frac{7}{2},\ \frac{11}{2},\ -\frac{13}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{13}{2},\ \frac{11}{2}$　③ $\frac{13}{2},\ \frac{7}{2},\ -\frac{11}{2}$
④ $\frac{11}{2},\ -\frac{13}{2},\ \frac{7}{2}$　⑤ $\frac{7}{2},\ -\frac{11}{2},\ \frac{13}{2}$

해설

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

13. 직선 $y = ax + 1$ 이 두 이차함수 $y = x^2 + x + 2$, $y = -x^2 + 4x$ 의 그래프와 모두 만나지 않도록 상수 a 의 값의 범위를 정하면 $\alpha < a < \beta$ 이다. 이 때, $\alpha + \beta$ 의 값을 구하면?

① -5　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 5

해설

직선과 이차함수를 연립하여 판별식이
0 보다 작으면 직선과 이차함수가 만나지 않는다.

1) $ax + 1 = x^2 + x + 2$	2) $ax + 1 = -x^2 + 4x$
$\Rightarrow x^2 + (1 - a)x + 1 = 0$	$\Rightarrow x^2 + (a - 4)x + 1 = 0$
$D = (a - 1)^2 - 4 < 0$	$\Rightarrow D = (a - 4)^2 - 4 < 0$
$\Rightarrow -1 < a < 3$	$\Rightarrow 2 < a < 6$

$\therefore$ 1), 2) 의 공통 해 : $2 < a < 3$

$\therefore \alpha + \beta = 5$

14. 이차함수 $y = x^2 + 3x + 1$ 의 그래프와 직선 $y = -x + 3$ 의 두 교점의 좌표를 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 라 할 때, $y_1 y_2$ 의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

해설

두 교점의 x 좌표 x_1, x_2 는
방정식 $x^2 + 3x + 1 = -x + 3$ 의 실근이다.
$x^2 + 4x - 2 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여
$x_1 + x_2 = -4$, $x_1 x_2 = -2$

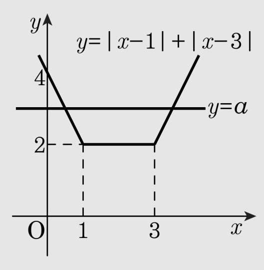
$$\begin{aligned} \therefore\ y_1 y_2 &= (-x_1 + 3)(-x_2 + 3) \\ &= x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 9 \\ &= -2 + 12 + 9 = 19 \end{aligned}$$

15. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$　② $a>1$　③ $a<2$　④ $a>2$　⑤ $a<3$

해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면
$a>2$



16. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2a - 5$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$y = x^2 - 2ax - 2a - 5$
$= (x - a)^2 - a^2 - 2a - 5$

y 의 최솟값 : $m = -a^2 - 2a - 5$
$= -(a + 1)^2 - 4$

m 의 최댓값 : -4

17. 함수 $y = (x^2 - 2x + 3)^2 - 2(x^2 - 2x + 3) + 1$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$t = x^2 - 2x + 3$ 으로 놓으면
$y = t^2 - 2t + 1 = (t - 1)^2 \cdots$ ㉠
또, $t = (x - 1)^2 + 2$ 이므로
$t \geq 2 \cdots$ ㉡
㉡의 범위에서 ㉠의 최솟값은
$t = 2$일 때 1이다.

18. x, y가 실수일 때, $x^2-6x+2y^2+4y+7$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$x^2-6x+2y^2+4y+7$

$=(x-3)^2+2(y+1)^2-4$이므로

$x=3,\ y=-1$일 때, 최솟값 -4를 갖는다.

19. x가 실수일 때 $\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}$의 값이 취할 수 있는 정수의 개수는?

① 2 개　② 3 개　③ 4 개　④ 5 개　⑤ 6 개

해설

$\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+1}=k$라 두면

$x^2-x+4=k(x^2+x+1)$

$(k-1)x^2+(k+1)x+k-4=0$

x가 실수이므로 실근이다.

따라서, 판별식 $D=(k+1)^2-4(k-1)(k-4)\geq 0$

$3k^2-22k+15\leq 0$

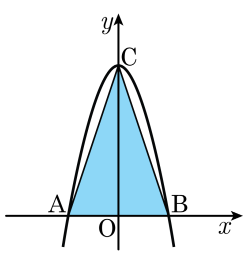
$\therefore\ \dfrac{11-2\sqrt{19}}{3}\leq k\leq\dfrac{11+2\sqrt{19}}{3}$

k는 정수이므로 대강의 범위를 구해보면

$0.\times\times\leq k\leq 6.\times\times$에서

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ 의 6개이다.

20. $y=-x^2+9$ 의 그래프와 x 축과의 교점을 A, B 라고 하고, y 축과의 교점을 C 라고 할 때, △ABC 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

점 C 는 꼭짓점이므로 $(0, 9)$, 점 A 와 B 는 $y=0$ 일 때, x 좌표이므로
$0=-x^2+9$
$\therefore x=\pm 3$
$\therefore \mathrm{A}=(-3, 0), \mathrm{B}=(3, 0)$
△ABC 의 넓이$=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27$

21. 둘레의 길이가 16cm 인 철사를 구부려서 부채꼴모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, ab 의 값을 구하면?

① 16　　② 20　　③ 36　　④ 55　　⑤ 64

해설

부채꼴의 반지름을 a, 넓이를 b 라 하면

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \times a \times (16-2a) = a(8-a) \\ &= -a^2 + 8a \\ &= -(a^2 - 8a + 16 - 16) \\ &= -(a-4)^2 + 16 \end{aligned}$$

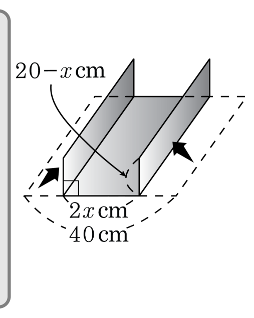
이 그래프가 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
꼭짓점은 $(4, 16)$ 이므로 반지름 $a = 4$ 일 때, 부채꼴의 넓이 $b = 16$ 으로 최대가 된다.
따라서 $ab = 64$ 이다.

22. 너비가 40 cm 인 철판의 양쪽을 접어 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대가 될 때, 높이를 구하면?

① 10　② 8　③ 6　④ 4　⑤ 2

해설

직사각형의 가로를 $2x$ 라 하면 세로는 $20-x$ 이다.
단면의 넓이는
$2x(20-x) = -2x^2+40x = -2(x^2-20x+200)+100 = -2(x-10)^2+200$
$\therefore$ $x=10$ 일 때 넓이가 최대이다.



23. 지상 40m 높이에서 vm/s 의 속도로 똑바로 위로 쏘아올린 공이 t 초 후에 지면으로부터 hm 만큼의 높이가 될 때, $h = vt + 40 - 5t^2$ 의 식이 성립한다. 공이 3 초 후에 최고 높이에 도달했을 때, 이 최고 높이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m

▷ 정답 : 85 m

해설

$h = -5t^2 + vt + 40 = -5\left(t - \frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v^2}{20} + 40$

이 물체는 $t = \frac{v}{10}$ 일 때, 최고 높이 $\frac{v^2}{20} + 40$ 에 도달하고, $\frac{v}{10} = 3$ 이므로 $v = 30$ 이다.

따라서 최고 높이는 85m 이다.

24. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\omega^3 = 1$

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

③ $\omega^2 = \overline{\omega}$

④ $\omega^2 + \omega = -1$

⑤ $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1$

해설

① $\omega^3 = 1(\bigcirc)$
② $\omega^2 + \omega + 1 = 0(\bigcirc)$
③ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이
$\omega, \overline{\omega}$이므로
$\omega + \overline{\omega} = -1$
$\overline{\omega} = -(1 + \omega) = -(-\omega^2) = \omega^2$
$\therefore \overline{\omega} = \omega^2(\bigcirc)$
④ $\omega^2 + \omega = -1(\bigcirc)$
⑤ $1 + \omega^2 + (\omega^3) \cdot \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \neq 1(\times)$

25. 방정식 $x^4-ax^2+8-a=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 정수 a의 값들의 합은?

① 30　② 25　③ 23　④ 18　⑤ 13

해설

$x^4-ax^2+8-a=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가지려면 $x^2=y$라고 치환하여 $y^2-ay+8-a=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

ⅰ) $D=a^2-4(8-a)=a^2+4a-32=(a+8)(a-4)>0$

$\therefore a<-8$ 또는 $a>4$

ⅱ) $a>0$

ⅲ) $8-a>0 \Rightarrow a<8$

$\therefore 4<a<8$ 이므로 $a=5,\ 6,\ 7$