1. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{A}(a), \mathrm{B}(b)(a > b)$ 사이의 거리 $\overline{\mathrm{AB}}$는 5이고 점 $\mathrm{C}(a+b)$의 좌표를 -1이라 할 때, 점 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 7　　⑤ 8

해설

$a > b$일때, $\mathrm{A}(a)$, $\mathrm{B}(b)$ 사이의 거리는 $a-b$이므로, $a-b=5$
따라서 $\mathrm{D}(a-b)$의 좌표는 5

2. 세 점 A $(1,5)$, B $(-4,-7)$, C $(5,2)$가 좌표평면 위에 있다. $\triangle ABC$에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, 점 D 의 좌표를 구하면?

① $(0,0)$ ② $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ③ $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

해설

$\overline{AB} = 13$, $\overline{AC} = 5$
따라서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 13 : 5$
D 는 B , C 를 $13 : 5$ 로 내분한 점
$\therefore \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

3. 좌표평면 위의 세 점 A$(4,\ -2)$, B$(1,\ 7)$, C$(-2,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형

② 이등변삼각형

③ 직각삼각형

④ 예각삼각형

⑤ 직각이등변삼각형

해설

세변의 길이는

$\overline{AB} = \sqrt{(1-4)^2 + \{7-(-2)\}^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

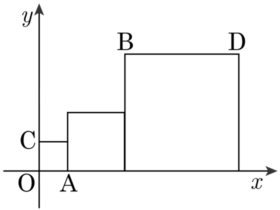
$\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$\overline{CA} = \sqrt{\{4-(-2)\}^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45}$

$= 3\sqrt{5}$

따라서 $\triangle$ABC에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$이고, $\overline{BC} = \overline{CA}$이므로 직각이등변삼각형이다.

4. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $\mathrm{C}(0, 4)$, 점 $\mathrm{D}(21, 12)$일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11　② 13　③ 15

④ 17　⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로

점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로

점 $\mathrm{B}(21-12,\ 12)$

즉, $\mathrm{B}(9,\ 12)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

5. 두 점 A $(-3,\ 4)$, B $(2,\ 6)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P와 y축 위의 점 Q의 좌표는?

① P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
② P$\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$
③ P$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$
④ P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{7}{4}\right)$
⑤ P$\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 P $(a,\ 0)$라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$\sqrt{(a+3)^2+(-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2+(-6)^2}$

Q의 좌표를 Q $(0,\ b)$라 하면

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$에서

$\sqrt{3^2+(b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2+(b-6)^2}$

두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2},\ b = \frac{15}{4}$

$\therefore$ P$\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$, Q$\left(0,\ \frac{15}{4}\right)$

6. 직선 $x + y = 2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(0, 6)$, $\mathrm{B}(2, 2)$에서 같은 거리에 있는 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{AP}}$의 길이를 구하면?

① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ 5

해설

$x + y = 2$ 위에 있는 점 P는

$(\alpha, -\alpha + 2)$로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \overline{\mathrm{BP}}^2$ 이므로

$\alpha^2 + (-\alpha - 4)^2 = (\alpha - 2)^2 + (-\alpha)^2$

$\alpha = -1$

$\mathrm{P}(-1,\ 3)$

$\therefore\ \overline{AP} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

7. 세 꼭짓점이 $A(1,\ 3)$, $B(p,\ 3)$, $C(1,\ q)$인 $\triangle ABC$의 외심의 좌표가 $(2,\ 1)$일 때 pq의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $pq = -3$

해설

$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-p)^2 + (1-3)^2$에서 $(p-2)^2 = 1$

$\therefore\ p = 1,\ 3$

그런데 $p = 1$일 때 점 A, B가 일치하므로 $p \neq 1$ $\therefore\ p = 3$

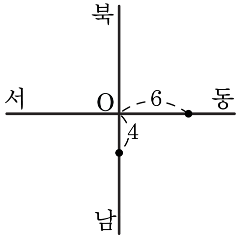
$(2-1)^2 + (1-3)^2 = (2-1)^2 + (1-q)^2$에서 $(q-1)^2 = 4$

$\therefore\ q = 3,\ -1$

그런데 $q = 3$일 때 점 A, C가 일치하므로 $q \neq 3$

$\therefore\ pq = 3 \times (-1) = -3$

8. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후　② 1.2 시간 후　③ 1.4 시간 후

④ 1.6 시간 후　⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, −4) 이고 t 시간 후의 A, B 의 좌표는 A($6-4t$, 0), B($0, -4+2t$) 이다. 따라서, t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2} = \sqrt{20t^2-64t+52} = \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52} = \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$ 이므로 $t=\frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. ∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

9. 네 점 A$(-2, 3)$, B$(3, a)$, C$(b, 4)$, D$(2, 8)$을 꼭짓점으로 하는 □ABCD 가 마름모가 되도록 하는 a, b 의 합을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

□ABCD가 마름모이므로
$\overline{AD} // \overline{BC}$, $\overline{AD} = \overline{BC}$이다.
따라서 점 D는 점 A를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이므로
점 C도 점 B를 x축 방향으로 4만큼
y축 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.
$\therefore\ (3+4,\ a+5) = (b,\ 4)$
$\therefore\ a = -1,\ b = 7$
$\therefore\ a + b = 6$

10. $\triangle$ABC 의 꼭짓점 A 의 좌표가 $(5, 6)$ 이고 무게중심 G 의 좌표가 $(3, 4)$ 일 때, 변 $\overline{\mathrm{BC}}$ 의 중점의 좌표는?

① $(1,\ 2)$ ② $(2,\ 5)$ ③ $(2,\ 3)$

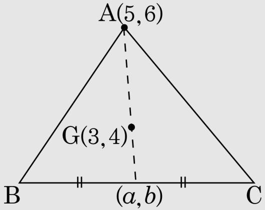
④ $(3,\ 4)$ ⑤ $(4,\ 5)$

해설

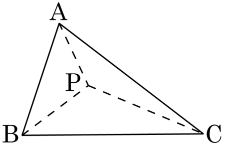
무게중심은 중선을 2 : 1 로 내분한다.

$\therefore\ \mathrm{G}\left(\dfrac{2a+5}{2+1},\ \dfrac{2b+6}{2+1}\right) = (3,\ 4)$

$\therefore\ a = 2,\ b = 3$



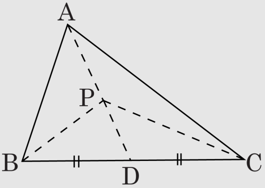
11. 다음 그림과 같이 $\triangle ABC$의 내부에 넓이가 삼등분이 되도록 점 P를 잡았더니 $\overline{AP}=4$, $\overline{BP}=3$, $\overline{CP}=5$가 되었다고 한다. 이때, 선분 BC의 길이는?



① $4\sqrt{3}$ ② $5\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{13}$ ⑤ $2\sqrt{13}$

해설

$\triangle ABC$의 내부에 넓이가 삼등분이 되는 점 P는 삼각형의 무게중심이다.
따라서 $\overline{AP}$의 연장선과 $\overline{BC}$의 교점을 D라 하면



$\overline{AP} : \overline{PD} = 2 : 1$

$\therefore \overline{PD} = 2$

$\triangle PBC$에서 중선 정리를 이용하면

$$\overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = 2\left(\overline{PD}^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$3^2 + 5^2 = 2\left(2^2 + \overline{BD}^2\right)$$

$$\overline{BD} = \sqrt{13},\ \overline{BC} = 2\cdot\overline{BD} = 2\sqrt{13}$$

12. 정점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 동점 P, x축 위를 움직이는 동점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}$가 최소가 되는 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

해설

최솟값은 점 A를 $y=x$에 대해 대칭시킨 점과 A를 x축에 대칭시킨 점 사이의 거리와 같다.

$y=x$에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}'(2,4)$

x축에 대한 대칭점은 $\mathrm{A}''(4,-2)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QA}}\geq\overline{\mathrm{A}'\mathrm{A}''}$

$=\sqrt{(2-4)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$

13. 점 A$(-2,\ 6)$와 점 B$(4,4)$, 그리고 평면 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}$의 중점이 B, $\overline{\mathrm{AQ}}$의 중점이 P일 때, 점 Q는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 몇 대 몇으로 외분하는 점인가?

① 4 : 3　　② 3 : 4　　③ 2 : 3　　④ 3 : 2　　⑤ 1 : 3

해설

P(x, y) 라 하면 $\dfrac{-2+x}{2}=4,\ \dfrac{6+y}{2}=4$ 에서

$x=10,\ y=2,\ \therefore\ \mathrm{P}(10,\ 2)$

Q$(\alpha,\ \beta)$ 라 하면 $\dfrac{-2+\alpha}{2}=10,\ \dfrac{6+\beta}{2}=2$ 에서

$\alpha=22\ ,\ \beta=-2$

$\therefore\ \mathrm{Q}(22,-2)$

그리고 점 Q 가 선분 AB 를 $m : n$ (단, $m>0,\ n>0,\ m\neq n$)

으로 외분한다고 가정하면

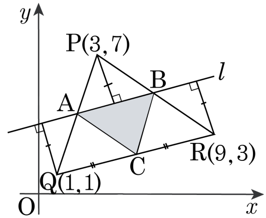
$\dfrac{4m+2n}{m-n}=22\cdots$ ①,

$\dfrac{4m-6n}{m-n}=-2\cdots$ ②

①, ②에서 $3m=4n$　　$\therefore m : n=4 : 3$

그러므로 점 Q 는 선분 AB 를 4 : 3 으로 외분한다.

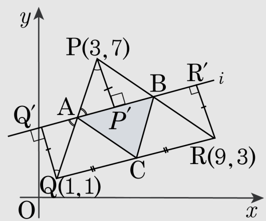
14. 다음 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{P}(3,7)$, $\mathrm{Q}(1,1)$, $\mathrm{R}(9,3)$ 으로부터 같은 거리에 있는 직선 l 이 선분 PQ, PR 과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 선분 QR 의 중점을 C 라 할 때, $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게중심의 좌표를 $\mathrm{G}(x,\ y)$ 라 하면 $x+y$ 의 값은?



① $\dfrac{16}{3}$ ② 6 ③ $\dfrac{20}{3}$ ④ $\dfrac{22}{3}$ ⑤ 8

해설

세 점 P, Q, R 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{P}', \mathrm{Q}', \mathrm{R}'$ 라 하면 $\triangle\mathrm{PAP}' \equiv \triangle\mathrm{QAQ}'$ ($\because$ ASA 합동) 이므로



점 A 는 선분 PQ 의 중점이다.
마찬가지로 점 B 는 선분 PR 의 중점이다.
따라서, 세 점 A, B, C 는 각각 선분 PQ , 선분 PR , 선분 QR 의 중점이므로 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게중심은 $\triangle\mathrm{PQR}$ 의 무게중심과 일치한다.
$\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게중심을 $\mathrm{G}(x,y)$ 라 하면

$$x=\frac{3+1+9}{3}=\frac{13}{3},\ y=\frac{7+1+3}{3}=\frac{11}{3}$$

따라서, $x+y=\dfrac{13}{3}+\dfrac{11}{3}=8$