1. 두 점 A(−4), B(6) 사이의 거리를 구하여라.

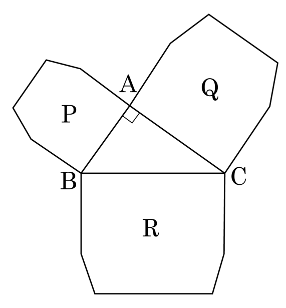
▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\overline{AB} = |6 - (-4)| = 10$

2. 다음 그림과 같이, 직각삼각형 ABC의 각 변을 한 변으로 하는 닮은 도형 P, Q, R가 있다. 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z 라고 할 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?



① $xy = z$　　② $x + y = z$

③ $x^2 + y^2 = z^2$　　④ $x^3 + y^3 = z^3$

⑤ 위에는 정답이 없다.

해설

도형 P, Q, R 가 닮은 도형들이고 그들의 닮음비가 $\overline{AB} : \overline{AC} : \overline{BC}$ 이므로 도형 P, Q, R의 넓이의 비는 닮음비의 제곱인 $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{BC}^2$ 이 된다. 그런데 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이므로 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
따라서, 도형 P, Q, R의 넓이를 각각 x, y, z라 하면 $x + y = z$

3. 세 점 $\mathrm{A}(2,\ 4), \mathrm{B}(-2, 0), \mathrm{C}(3, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는?

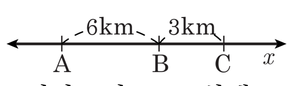
① $(0, 1)$ ② $(1, 1)$ ③ $(1, 2)$ ④ $(2, 1)$ ⑤ $(0, 1)$

해설

무게중심 구하는 공식을 이용한다.

$$\left(\frac{2+(-2)+3}{3},\ \frac{4+0+2}{3}\right) = (1, 2)$$

4. 그림에서 A, B, C는 도로가 통과하는 세 마을이다. A마을과 B마을 사이의 거리는 6 km, B마을과 C마을 사이의 거리는 3 km이다. 이 도로 위에 또 하나의 다른 마을이 있는데, 그 마을과 A 사이의 거리는 그 마을과 C 마을 사이의 거리의 2배이다. 그 마을과 B마을 사이의 거리는?

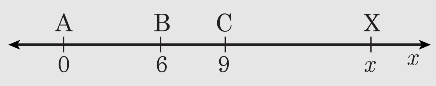


① 6 km ② 9 km ③ 12 km

④ 15 km ⑤ 18 km

해설

그림과 같이 A마을을 원점으로 하고, 구하고자 하는 마을을 X라 하면



A(0), B(6), C(9), X(x)

A마을과 X마을 사이의 거리는

C마을과 X마을 사이의 거리의 2배이므로

$|x-0| = 2|x-9|$

곧, $|x| = 2|x-9|$

$\therefore\ 2(x-9) = \pm x$

$\therefore\ x = 6$ 또는 $x = 18$

여기서 $x = 6$이면 X = B가 되므로 성립하지 않는다.

따라서 $x = 18$

이 때, X마을과 B마을 사이의 거리는 $18 - 6 = 12$(km)

5. 세 꼭짓점의 좌표가 각각 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$ 인 $\triangle ABC$가 $\angle A$가 직각인 직각삼각형이 되도록 하는 상수 a의 값들의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

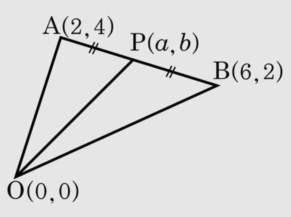
$\triangle ABC$에서 $\angle A$가 직각이므로
피타고라스의 정리에 의해
$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{BC}^2 \cdots$ ㉠
이때, 세 점 $A(a, 3)$, $B(-1, -5)$, $C(3, 7)$에 대하여
$\overline{AB}^2 = (-1-a)^2 + (-5-3)^2 = a^2 + 2a + 65$
$\overline{CA}^2 = (a-3)^2 + (3-7)^2 = a^2 - 6a + 25$
$\overline{BC}^2 = (3+1)^2 + (7+5)^2 = 160$ 이므로
㉠에 의해 $2a^2 - 4a + 90 = 160$
$\therefore\ a^2 - 2a - 35 = 0$
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 a의 값들의 합은 2이다.

6. 세 점 $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(6,2)$ 와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 삼각형 OAP 의 넓이의 2배일 때, $a+b$ 의 값은?

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$ 와 $\triangle OAP$ 의 높이가 같으므로
$\triangle OAB = 2\triangle OAP$ 이려면
P는 선분 AB 의 중점이어야 한다.



이 때, $P\left(\frac{2+6}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$
즉 $P(4,3)$ 이므로 $a=4, b=3$
$\therefore a+b=7$

7. 다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대한 설명이다.

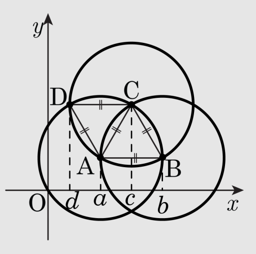
㉠ 점 A와 점 B는 x축 위에 있다.
㉡ 점 B의 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.
㉢ $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{CD}$

점 A,B, C, D의 x좌표를 각각 a, b, c, d라 할 때, 옳은 것은?

① $a<d<c<b$ ② $c<a<d<b$ ③ $c<d<a<b$
④ $d<a<c<b$ ⑤ $d<c<a<b$

해설

그림에서 알 수 있듯이 점 A, B, C, D에 대하여 각각의 x좌표 a, b, c, d의 크기는 $d<a<c<b$



8. $A(-1,\ -3)$, $B(3,\ 0)$에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점의 y좌표를 구하여라.

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{3}$　⑤ $-\frac{1}{6}$

해설

y 축 위의 점을 $(0, \alpha)$라 하면

$\sqrt{(-1-0)^2+(-3-\alpha)^2} = \sqrt{(0-3)^2+\alpha^2}$

$\therefore\ \alpha = -\frac{1}{6}$

9. 직선 $y = x$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(1, 6)$, $\mathrm{B}(2, -1)$ 에서 같은 거리에 있는 점의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{12}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

해설

(a, b) 가 $y = x$ 위에 있으므로 $b = a$

$\sqrt{(a-1)^2 + (a-6)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (a+1)^2}$

$(a-1)^2 + (a-6)^2 = (a-2)^2 + (a+1)^2$

$-2a + 1 - 12a + 36 = -4a + 4 + 2a + 1$

$-12a = -32$

$\therefore\ a = \frac{8}{3}$

$\therefore\ a + b = a + a = \frac{8}{3} \times 2 = \frac{16}{3}$

10. 좌표평면 위의 세 점 $A(-1,\ 2)$, $B(x,\ 0)$, $C(3,\ 1)$에 대하여 $\angle ABC$가 직각일 때, 실수 x의 값의 합은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$\triangle ABC$는 $\angle B$가 직각인 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$이 성립한다.
$(x+1)^2 + 4 + (x-3)^2 + 1 = 16 + 1$
$x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore$ 근과 계수와의 관계에 의하여 실수 x의 값의 합은 2이다.

11. $\triangle$ABC에서 A$(6,\ 1)$, B$(-1,\ 2)$, C$(2,\ 3)$이라 한다. 이 삼각형의 외접원의 반지름을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

외심을 P$(a,\ b)$라 하면

(1) $\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2 = (a+1)^2+(b-2)^2$ ······ ㉠

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PC}}^2 \Leftrightarrow (a-6)^2+(b-1)^2 = (a-2)^2+(b-3)^2$ ······ ㉡

㉠, ㉡를 각각 전개하여 정리하면

$7a-b-16=0,\ 2a-b-6=0$

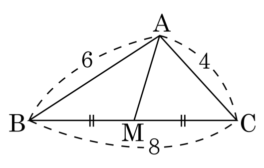
연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$

따라서 외심은 $(2,\ -2)$이다.

(2) $\overline{\mathrm{PA}}^2 = (2-6)^2+(-2-1)^2 = 25$

$\therefore \overline{\mathrm{PA}} = 5$

12. 다음 그림의 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 4$이고, $\overline{BC}$의 중점이 M일 때, $\overline{AM}^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 10

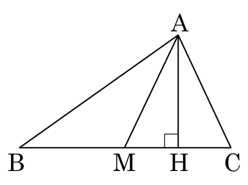
해설

중선정리에 의하여
$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2)$ 이므로

$6^2 + 4^2 = 2(\overline{AM}^2 + 4^2)$

$36 + 16 = 2\overline{AM}^2 + 32$
$\therefore \overline{AM}^2 = 10$

13. 다음은 예각삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이 성립함을 보인 것이다.



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라하자.
직각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(가)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{BM}^2 + 2\overline{BM}\cdot\overline{MH} + \boxed{\text{(나)}}^2 \cdots ㉠\end{aligned}$$

직각삼각형 AHC 에서

$$\begin{aligned}\overline{AC}^2 &= \overline{CH}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \boxed{\text{(다)}}^2 + \overline{AH}^2 \\ &= \overline{CM}^2 - 2\overline{CM}\cdot\overline{MH} + \boxed{\text{(라)}}^2 \cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$이다.

(가), (나), (다)에 알맞은 것은?

① (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

② (가) $\overline{BC} + \overline{CH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

③ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{BH} - \overline{BM}$

④ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AH}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

⑤ (가) $\overline{BM} + \overline{MH}$ (나) $\overline{AM}$ (다) $\overline{CM} - \overline{MH}$

해설

생략

14. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(1, 2)$, $\mathrm{P}(0, b)$, $\mathrm{Q}(a, 0)$, $\mathrm{B}(5, 1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$의 최솟값을 k라 할 때, k^2의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 45

해설

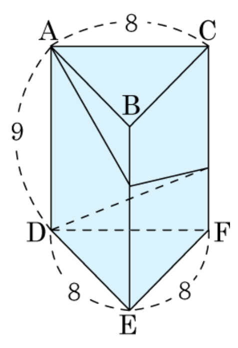
점 $\mathrm{A}\,(1, 2)$의 y축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{A}'(-1, 2)$, 점 $\mathrm{B}(5, 1)$의 x축에 대하여 대칭인 점을 $\mathrm{B}'(5, -1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\geq \overline{\mathrm{A'B'}}=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}$

따라서 $k=\sqrt{45}$이므로 $k^2=45$

15. 다음 그림과 같은 삼각기둥의 꼭짓점 A 에서 출발하여 모서리 BE, CF 를 순서대로 지나 꼭짓점 D 에 이르는 최단 거리를 구하여라.

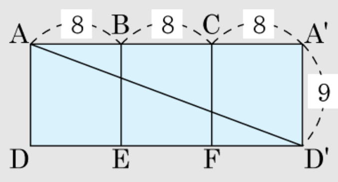


▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{73}$

해설

$\overline{AD'} = \sqrt{24^2+9^2} = \sqrt{576+81} = \sqrt{657} = 3\sqrt{73}$

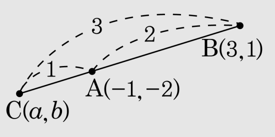


16. 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -2)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$ 에 대하여 점 A 의 방향으로 그은 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 연장선 위에 $3\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{BC}}$ 가 되게 하는 점 C 의 좌표를 구하면?

① $\mathrm{C}\left(-2,\ -\frac{3}{2}\right)$ ② $\mathrm{C}\left(-2,\ -\frac{5}{2}\right)$ ③ $\mathrm{C}(-2,\ -3)$
④ $\mathrm{C}\left(-3,\ -\frac{5}{2}\right)$ ⑤ $\mathrm{C}\left(-3,\ -\frac{7}{2}\right)$

해설

$3\overline{\mathrm{AB}} = 2\overline{\mathrm{BC}}$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = 2 : 3$ 이므로, 다음 그림에서 점 A 는 $\overline{\mathrm{CB}}$ 를 $1:2$ 로 내분하는 점이다.



이 때, 점 C 의 좌표를 $\mathrm{C}(a,\ b)$ 라 하면

$\mathrm{A}\left(\frac{1\cdot 3+2a}{1+2},\ \frac{1\cdot 1+2b}{1+2}\right)$ 이므로

$\frac{3+2a}{3} = -1$ 에서 $a=-3$

$\frac{1+2b}{3} = -2$ 에서 $b = -\frac{7}{2}$

따라서 점 C 의 좌표는 $\mathrm{C}\left(-3,\ -\frac{7}{2}\right)$ 이다.

17. O(0, 0), A(1, 2), B(3, 2)일 때, 평행사변형 OABC의 넓이를 구하면?

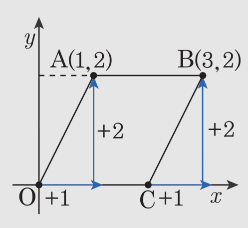
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{\mathrm{OA}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{CB}}$, $\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{CB}}$이

점 A는 점 O를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 점 B도 점 C를 x축 방향으로 1만큼, y축 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.



$\therefore$ C = (2, 0)

따라서 밑변이 2, 높이가 2이므로

(넓이) $= 2 \times 2 = 4$

18. 삼각형 ABC의 두 꼭짓점의 좌표가 $A(-1,4)$, $B(0,3)$이고, 무게중심의 좌표가 $G(2,1)$일 때, 꼭짓점 C의 좌표를 구하면?

① $(7,-4)$ ② $(3,-6)$ ③ $(5,-5)$
④ $(-1,8)$ ⑤ $(1,1)$

해설
무게중심 구하는 공식을 이용한다.
$C=(x,y)$라 하면
$$\left(\frac{-1+0+x}{3}, \frac{4+3+y}{3}\right)=(2,1)$$
$\therefore\ x=7\ \ y=-4$
$\therefore\ C=(7,-4)$

19. $\triangle$ABC 의 무게중심이 $(3, 1)$ 이고 각 변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는 점을 각각 P, Q, R이라 할 때, $\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표를 구하면?

① (2, 3)　② (1, 3)　③ (3, 2)

④ (2, 2)　⑤ (3, 1)

해설

세 점을 $(a, d), (b, e), (c, f)$ 라 하면,
무게중심이 $(3, 1)$ 이므로,
$\dfrac{a+b+c}{3} = 3,\ \dfrac{d+e+f}{3} = 1 \cdots$ ㉠
변 AB, BC, CA 를 $3:2$ 로 내분하는
점 P, Q, R 의 좌표는
$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a+3b}{3+2}, \dfrac{2d+3e}{3+2}\right) = \left(\dfrac{2a+3b}{5}, \dfrac{2d+3e}{5}\right)$
$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2b+3c}{3+2}, \dfrac{2e+3f}{3+2}\right) = \left(\dfrac{2b+3c}{5}, \dfrac{2e+3f}{5}\right)$
$\mathrm{R}\left(\dfrac{2c+3a}{3+2}, \dfrac{2f+3d}{3+2}\right) = \left(\dfrac{2c+3a}{5}, \dfrac{2f+3d}{5}\right)$ 이며,
$\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\dfrac{5(a+b+c)}{5\cdot 3}, \dfrac{5(d+e+f)}{5\cdot 3}\right)$
$= \left(\dfrac{a+b+c}{3}, \dfrac{d+e+f}{3}\right)$
$\therefore$ ㉠에 의해 (3, 1)

해설

변을 일정하게 내분하는 점으로 이루어진 삼각형의 무게중심은 원래 삼각형의 무게중심과 같다.
$\therefore$ (3, 1)

20. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 4), B(−2, 6), C(6, 8) 를 꼭지점으로 하는 $\triangle$ABC 에서 변 AB의 중점을 P, 변 BC 의 중점을 Q, 변 CA의 중점을 R이라 하자. $\triangle$PQR 의 무게중심의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심과 각 변의 중점을 연결하여 만든 $\triangle$PQR 의 무게중심은 같다.

$\triangle$ABC 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-2)+6}{3},\ \frac{4+6+8}{3}\right)=(2,\ 6)$$

따라서 $a=2,\ b=6$

$\therefore\ a+b=8$

21. 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(3,1), \mathrm{B}(1,3)$ 에 대하여 선분 $\mathrm{OA}, \mathrm{AB}, \mathrm{BO}$ 를 $2 : 1$ 로 내분하는 점을 차례로 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ 라 할 때, $\triangle \mathrm{PQR}$ 의 무게중심의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$　② $(1, -1)$　③ $(1, 1)$
④ $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$　⑤ $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

해설

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$ 이라 하면

$x_1 = \dfrac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 0}{2+1}$,

$y_1 = \dfrac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{2+1}$

$\therefore \mathrm{P}\left(2, \frac{2}{3}\right)$

점 Q, R 도 마찬가지 방법으로 계산하면

$\mathrm{Q}\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

따라서 $\triangle \mathrm{PQR}$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}}{3}, \frac{\frac{2}{3} + \frac{7}{3} + 1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

22. 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표가 G(2, −1) 이고 세 변 AB, BC, CA 를 2 : 1 로 내분하는 점이 각각 $\mathrm{P}(a, 3)$, $\mathrm{Q}(-2, -2)$, $\mathrm{R}(5, b)$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

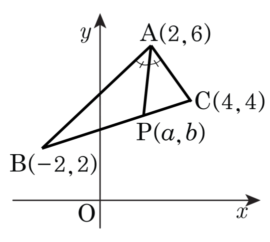
▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

삼각형 ABC 의 무게중심과 삼각형 PQR 의 무게중심은 일치한다.
삼각형 PQR 의 무게중심의 좌표는
$\left(\frac{a-2+5}{3}, \frac{3-2+b}{3}\right)$ 이므로
$\frac{a+3}{3} = 2$ 에서 $a = 3$
또 $\frac{1+b}{3} = -1$ 에서 $b = -4$
$\therefore\ a + b = -1$

23. 다음 그림과 같이 세 점 A(2, 6), B(−2, 2), C(4, 4) 를 꼭짓점으로 하는 △ABC 에서 ∠A 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 P(a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값은?



① 10　② 15　③ 20
④ 25　⑤ 30

해설

△ABC 에서 ∠A 의 이등분선이
변 BC 와 만나는 점을 P(a, b) 라 하면
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$ 가 성립한다.
이때, $\overline{AB} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-6)^2} = 4\sqrt{2}$,
$\overline{AC} = \sqrt{(4-2)^2+(4-6)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP} = 2 : 1$
따라서 점 P(a, b) 는 변 BC 를 2 : 1 로 내분하는 점이다.

$\therefore a = \dfrac{2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2)}{2+1} = 2$,

$b = \dfrac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 2}{2+1} = \dfrac{10}{3}$

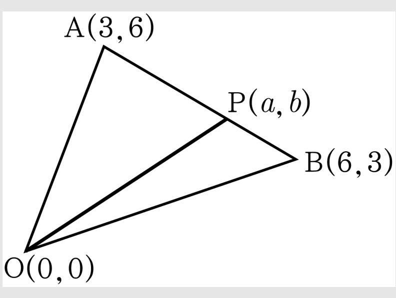
$\therefore\ 3ab = 3 \cdot 2 \cdot \dfrac{10}{3} = 20$

24. 세 점 $O(0,0)$, $A(3,6)$, $B(6,3)$와 선분 AB 위의 점 $P(a,b)$에 대하여 삼각형 OAP의 넓이가 삼각형 OBP의 넓이의 2배일 때, $a-b$의 값은?

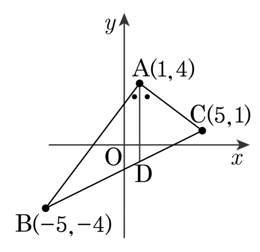
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 6

해설

다음 그림에서 $\triangle OAB$와 $\triangle OAP$의 높이가 같으므로
$\triangle OAP = 2\triangle OBP$이려면
P는 두 점 A, B를 $2:1$로 내분하여야 한다.
따라서 $P\left(\frac{12+3}{3}, \frac{6+6}{3}\right)$
즉 $P(5,4)$이므로 $a=5, b=4$
$\therefore a-b=1$



25. 다음 그림과 같이 세점 A(1, 4), B(−5, −4), C(5, 1)를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



① $1:1$ ② $\sqrt{2}:1$ ③ $\sqrt{3}:1$

④ $2:1$ ⑤ $\sqrt{5}:1$

해설

두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD}:\overline{CD}$ 이고
각의 이등분선정리에 의해
$\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$
$\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(4+4)^2}=\sqrt{100}=10$
$\overline{AC}=\sqrt{(1-5)^2+(4-1)^2}=\sqrt{25}=5$
$\therefore\ \triangle ABC : \triangle ACD = 2:1$

26. 두 점 A$(-1,\ 3)$, B$(3,\ 5)$에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점을 P, y축 위의 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하면?

① 4　　② $\sqrt{5}$　　③ $2\sqrt{5}$　　④ $3\sqrt{5}$　　⑤ $4\sqrt{5}$

해설

P$(a,\ 0)$이라하면, $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{BP}}$

$(a+1)^2 + 3^2 = (a-3)^2 + 5^2$, $8a = 24$

$\therefore\ a = 3$

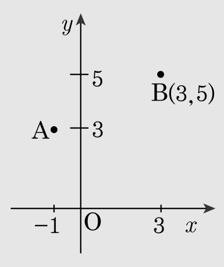
Q$(0,\ b)$이라 하면, $\overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{BQ}}$

$1^2 + (b-3)^2 = (-3)^2 + (b-5)^2$

$\therefore\ 4b = 24$

$\therefore\ b = 6$ P$(3,\ 0)$, Q$(0,\ 6)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{3^2+6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$



27. 직선 $y=2x+1$ 위에 있고, $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}(0,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는?

① $\mathrm{P}(1,\ 0)$　　② $\mathrm{P}(0,\ 1)$　　③ $\mathrm{P}(-1,\ 0)$

④ $\mathrm{P}(0,\ -1)$　　⑤ $\mathrm{P}(0,\ 0)$

해설

점 $\mathrm{P}(a,\ 2a+1)$라고 하면, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}$ 이므로

$\sqrt{(a-2)^2+4a^2}=\sqrt{a^2+4(a+1)^2}$

$-4a+4=8a+4$

$\therefore\ a=0$

$\therefore\ \mathrm{P}(0,\ 1)$

28. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(7, 4)$, $\mathrm{B}(8, 6)$과 직선 $y = x$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$의 값을 최소가 되게 하는 점 P의 x좌표를 a라 할 때, $5a$의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

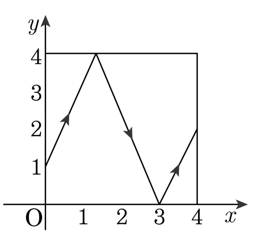
$\mathrm{A}(7,\ 4)$를 $y = x$에 대칭이동한 점 $\mathrm{C}(4,\ 7)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}} + \overline{\mathrm{PB}}$가 최소인 점 P는

선분 BC와 직선 $y = x$의 교점이다.

$y = -\frac{1}{4}x + 8$와 $y = x$의 교점은 $\left(\frac{32}{5}, \frac{32}{5}\right)$

$\therefore\ 5a = 32$

29. $(0,0)$, $(0,4)$, $(4,4)$ 와 $(4,0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4,2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)



① $(1,\ 4)$ ② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$ ③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$
④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$ ⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0,1)$ 과 $(4,10)$ 을 연결하는 직선과 $y=4$ 와의 교점을 계산하면 된다. $\begin{cases} y=\frac{9}{4}x+1 \\ y=4 \end{cases}$ $\therefore\ x=\frac{4}{3}$

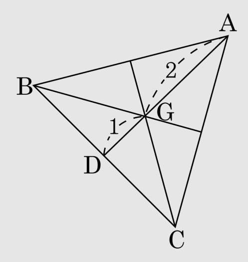
따라서, $\left(\frac{4}{3},4\right)$ 를 지난다.

30. A(2, 2) 인 정삼각형 ABC가 있다. 무게중심이 원점일 때, 이 정삼각형의 한변의 길이를 구하면?

① $3\sqrt{3}$　② $2\sqrt{6}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $3\sqrt{2}$　⑤ $2\sqrt{3}$

해설

무게중심은 그림처럼 중선을 2 : 1로 내분한다.



$\therefore\ \overline{AD} = \frac{3}{2}\overline{AG} = \frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

그리고 $\triangle$ABC는 정삼각형이므로 한 변의 길이가 a인 정삼각형의 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 3\sqrt{2}$

$\therefore a = 2\sqrt{6}$

31. $\triangle$ABC 의 무게중심이 G(1, 4) 이고, 세 변 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$ 의 중점이 각각 $(-1, 6)$, (a, b),$(3, 4)$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\triangle$ABC 의 무게중심 G 는
세변 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$ 의 중점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 무게중심과 일치한다.
따라서 $\dfrac{-1+a+3}{3}=1$, $\dfrac{6+b+4}{3}=4$ 이므로
$a=1$, $b=2$ 이고, $\therefore\ a+b=3$

32. 좌표평면 위에 세 지점 $P(1,5)$, $Q(-2,-4)$, $R(5,3)$이 있다. 이들 세 지점에서 같은 거리에 있는 지점에 물류창고를 설치하려고 한다. 이때, 창고의 위치의 좌표는?

① $(0,-1)$ ② $(0,0)$ ③ $(0,1)$

④ $(1,0)$ ⑤ $(1,1)$

해설

$A(a,\ b)$라고 하면

$(a-1)^2+(b-5)^2=\overline{AP}^2$ $\cdots$ ①

$(a+2)^2+(b+4)^2=\overline{AQ}^2$ $\cdots$ ②

$(a-5)^2+(b-3)^2=\overline{AR}^2$ $\cdots$ ③

$\overline{AP^2}=\overline{AQ}^2=\overline{AR}^2$이므로

①, ② 연립하면 $a+3b=1$

①, ③ 연립하면 $2a-b=2$

$\therefore\ a=1,\ b=0$

$\therefore\ (1,\ 0)$

$\therefore$ 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 외심을 구하는 것과 같다.

33. 두 점 A , B 에 대하여 선분 AB 를 1 : 2 로 내분하는 점이 P(2, 3) , 1 : 2 로 외분하는 점이 Q(−2, 7) 일 때, 선분 AB 의 길이를 구하여라.

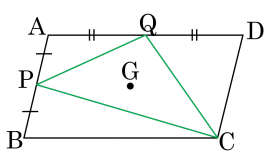
▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{2}$

해설

$A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ 라고 하면
P 는 내분점이고 Q 는 외분점이므로
$\frac{x_2+2x_1}{1+2}=2,\ \frac{y_2+2y_1}{1+2}=3,$
$\frac{-2x_1+x_2}{1-2}=-2,\ \frac{-2y_1+y_2}{1-2}=7$
위 식을 정리하면,
$2x_1+x_2=6$ ⋯⋯ ①
$2y_1+y_2=9$ ⋯⋯ ②
$-2x_1+x_2=2$ ⋯⋯ ③
$-2y_1+y_2=-7$ ⋯⋯④
①과 ③으로부터 $2x_2=8$
따라서 $x_2=4$ ①에 대입하면 $x_1=1$
②와 ④로부터 $2y_2=2$
따라서 $y_2=1$ ②에 대입하면 $y_1=4$
따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2}=3\sqrt{2}$ 이다.

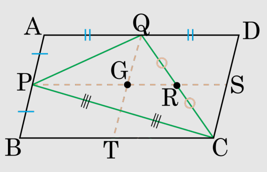
34. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 두 변 AB, AD의 중점을 각각 P, Q라 하자. 두 점 A, C의 좌표가 각각 $A(a, b), C(c, d)$이고, 삼각형 PCQ의 무게중심 G의 좌표가 $(4, 1)$일 때, $a+b+c+d$의 값은?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

위 그림과 같이 $\overline{PG}$의 연장선이 $\overline{QC}, \overline{DC}$와 만나는 점을 각각 R, S라 하고
$\overline{QG}$의 연장선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 T라 하면



$\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{PS}$이므로 점 S는 선분 DC의 중점이고
$\overline{QT} \mathbin{/\!/} \overline{DC}$이므로 점 T는 선분 BC의 중점이다.
따라서 $\overline{PG} : \overline{GR} = 2 : 1$, $\overline{GR} : \overline{RS} = 1 : 1$이므로 점 G는 선분 PS의 중점이다.
따라서 점 G는 대각선 AC의 중점이고 선분 AC의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$이므로
$\frac{a+c}{2} = 4, \frac{b+d}{2} = 1$에서 $a+c = 8, b+d = 2$
$\therefore\ a+b+c+d = 8+2 = 10$

35. 세 점 $A(1,\ 4)$, $B(-2,\ 3)$, $C(3,\ -2)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 $D(a, b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

각의 이등분선의 정리에 의해, $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$

$\therefore\ \sqrt{10} : 2\sqrt{10} = \overline{BD} : \overline{DC} = 1 : 2$

$\therefore$ D 는 $\overline{BC}$를 $1 : 2$로 내분하는 점이다.

$$D = \left(\frac{1\times 3 + 2\times(-2)}{1+2}, \frac{1\times(-2) + 2\times 3}{1+2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$\therefore\ a+b = 1$