

1. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?

- ① $x \rightarrow x - 1$
- ② $x \rightarrow x$ 의 양의 제곱근
- ③ $x \rightarrow x$ 를 4 로 나눈 나머지
- ④ $x \rightarrow x^2 - 1$
- ⑤ $x \rightarrow |-1|$

해설

- ① $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1 - 1 = 0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ② $x = 2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ③ $x = 4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ④ $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2 - 1 = 0 \notin N$ 따라서 함수가 아니다.
- ⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

2. 양의 정수 전체의 집합 X 에서 Y 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.
 $f(x) = (x \text{의 약수의 개수})$ 이 때, 다음 중 $f(x) = 4$ 인 x 가 될 수 있는
것을 고르면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 24

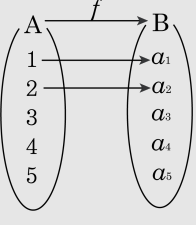
해설

5의 약수 : 1, 5 $\Rightarrow f(5) = 2$
9의 약수 : 1, 3, 9 $\Rightarrow f(9) = 3$
12의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\Rightarrow f(12) = 6$
15의 약수 : 1, 3, 5, 15 $\Rightarrow f(15) = 4$
24의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 $\Rightarrow f(24) = 8$
따라서 보기 중 $f(x) = 4$ 인 것은 15

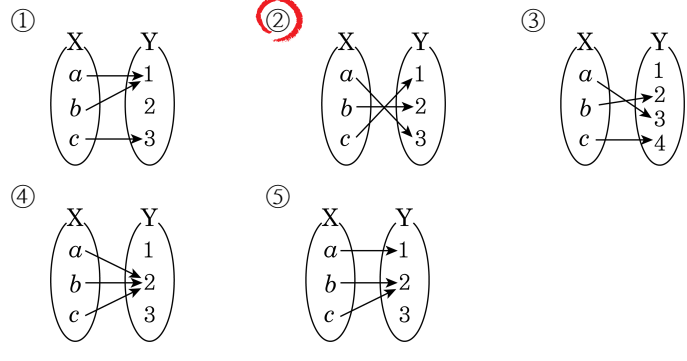
3. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?
- ① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
- ④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수
 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소
3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중
하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 =$
125 (개)



4. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?



해설

주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ②번이다.

5. 함수 $f(x) = ax + b (a > 0)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 이 함수 $f(x)$ 와 같을 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

- ① $a = 1, b = 0$ ② $a = 1, b = 1$ ③ $a = 2, b = 0$
④ $a = 2, b = 1$ ⑤ $a = 3, b = 0$

해설

$$f^{-1}(x) = f(x) \text{ 에서 } f(f(x)) = x$$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= af(x) + b \\ &= a(ax + b) + b \\ &= a^2x + ab + b \end{aligned}$$

$$a^2x + ab + b = x$$

$$\therefore a^2 = 1, ab + b = 0$$

$$\therefore a = 1, b = 0$$

6. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?
- ① $n(X) = n(Y)$ 이다.
 - ② $x_1 = x_2$ 이면 $f(x_1) = f(x_2)$
 - ③ $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.
 - ④ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.
 - ⑤ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

해설

①, ②, ③, ⑤ : 역함수를 갖기 위해서는 일대일 대응이 어야 한다.
④ : $y = x$ 에 대해 대칭관계이다.

7. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x < 0) \end{cases} \text{ 가 } f^{-1}(2) = -3 \text{ 을 만족시킬 때, } f(5) \text{ 의}$$

값은 얼마인가?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$f^{-1}(2) = -3 \text{ 에서 } f(-3) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(-3) = 3 + k = 2$$

$$\therefore k = -1 \text{ 이므로 } f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x < 0) \end{cases}$$

$$\therefore f(5) = 5 - 1 = 4$$

8. 함수 $f(x) = |4x + a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x + a| + b = \left| 4 \left(x + \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는

$y = |4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향

으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음

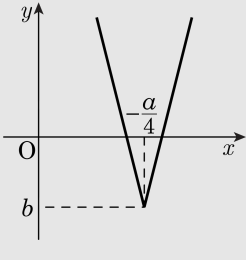
그림과 같다.

따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3, b = -2$

따라서 $a = -12, b = -2$ 이므로

$\therefore b - a = 10$



9. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$

10. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 상수)

$$\frac{\frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+8)} + \frac{1}{(x+8)(x+10)}}{}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여
분다.
(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+8} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+8} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{5}{x(x+10)} \\ &a = 5, b = 10 \text{ 이므로 } a + b = 15 \end{aligned}$$

11. 분수식 $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{x}$

해설

$$(\text{준 식}) = 1 - \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

12. 함수 $f(x)$ 가 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 이고 임의의 실수 x 에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) &= g(0) = f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

13. 집합 $A = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 가 다음과 같을 때, 항등함수가 아닌 것은?

- ① $f : x \rightarrow 2|x|$ ② $f : x \rightarrow x^3$ ③ $f : x \rightarrow x^5$
④ $f : x \rightarrow x$ ⑤ $f : x \rightarrow x|x|$

해설

① $f(-1) = 2, f(0) = 0, f(1) = 2$ 이므로 항등함수가 아니다.
①, ②, ③, ④ $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로 모두 항등함수이다.

14. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X = \{x \mid x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$k \geq 2$ 라면 $x \geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로

함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일 대응이 되려면

$$f(x) \geq x$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x \geq x$$

$$\Rightarrow x \leq 0, x \geq 5$$

$$x \geq k \text{ 이므로 } k = 5$$

15. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a, b, c, d, e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1) = a, f(2) = b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1) = a, f(2) = b$ 이므로 $f : A \rightarrow B$ 가 일대일 대응이라면
 $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
 $f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 개

16. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

i) $x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$
ii) $x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$
 $\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$

17. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$ 에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

18. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$$

$$\text{즉 } 2kx + k^2 - k = 0$$

모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

19. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x)) = x$ 가 되는 함수 $g(x)$ 는?

- ① $1-x$ ② $\frac{1}{1-x}$ ③ $\frac{x}{x-1}$ ④ $\frac{x-1}{x}$ ⑤ $\frac{x-1}{x+1}$

해설

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ 일 때}$$

$$g(f(x)) = x \text{ 에서 } f(x) = t \text{로 놓으면}$$

$$\frac{1}{1-x} = t \text{ 에서 } (1-x)t = 1, t - xt = 1$$

$$xt = t - 1, x = \frac{t-1}{t} \text{ 이므로 } g(t) = \frac{t-1}{t}$$

$$\therefore g(x) = \frac{x-1}{x}$$

20. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = -4x - 5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 5 ② 3 ③ 1 ④ -3 ⑤ -5

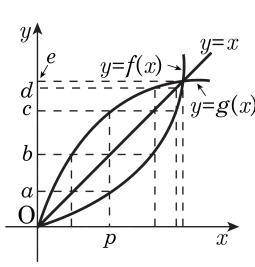
해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
 $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x + 3)$
 $= a(2x + 3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
 $2ax + 3a + b = -4x - 5$,
 $2a = -4, 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
 $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
 $h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
 $h(2x + 3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
 $h(3) = g(0) = -5$

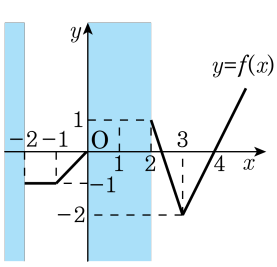
21. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)
- ① a ② b ③ c
④ d ⑤ e



해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$
 $\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

22. 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$ 에 대한 설명이다. M, N 의 합을 구하여라.



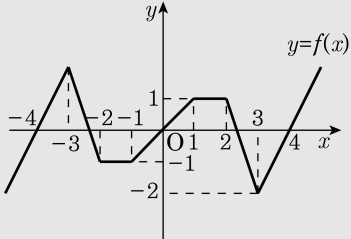
$-4 \leq x \leq -2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 M 이고, $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 N 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키므로 주어진 함수는 기함수 즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면 다음 그림과 같으므로



$-4 \leq x \leq -2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $M = 2$ 이고,
 $0 \leq x \leq 2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $N = 1$ 이다.
 $\therefore M + N = 3$

23. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \leq x \leq 2$)의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-1 \leq x < 0$ 일 때, $[x] = -1 \quad \therefore y = x + 1$

$0 \leq x < 1$ 일 때, $[x] = 0 \quad \therefore y = x$

$1 \leq x < 2$ 일 때, $[x] = 1 \quad \therefore y = x - 1$

$x = 2$ 일 때, $[x] = 2 \quad \therefore y = 0$

따라서, $y = x - [x]$ ($-1 \leq x \leq 2$)의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.

24. $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{43}{19}$ 을 만족하는 자연수 a, b, c, d 의 합은?

- ① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$\begin{aligned} \frac{43}{19} &= 2 + \frac{5}{19} = 2 + \frac{1}{\frac{19}{5}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{4}{5}} \\ &= 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} \\ \therefore a &= 2, b = 3, c = 1, d = 4 \end{aligned}$$

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x - 2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는 $a > 0$

② $-1 \leq a \leq 1$

③ $-2 < a < 2$

④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \geq 1$

해설

(i) $x \geq 2$ 일 때 $f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a + 1)x + 1$

(ii) $x < 2$ 일 때 $f(x) = ax - (x - 2) + 3 = (a - 1)x + 5$

함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야

하므로 (i), (ii)에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.

따라서, $(a + 1)(a - 1) > 0$ 이므로

$a < -1$ 또는 $a > 1$

26. 양의 실수 전체의 집합 X 에서 X 로의 함수 $f(x) = x^2 + 2x, h(x) = \frac{3x+1}{f(x)}$ 에 대하여, $(h \circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

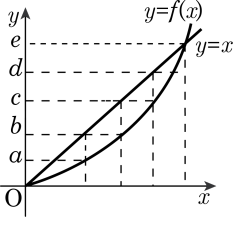
- ① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{4}{3}$

해설

$$\begin{aligned} f^{-1}(3) = a \text{라 하면 } f(a) &= 3 \\ f(a) = a^2 + 2a &= 3 \\ a^2 + 2a - 3 = 0, (a+3)(a-1) &= 0 \\ a > 0 \text{ 이므로 } a &= 1 \\ \therefore f^{-1}(3) = 1, f(1) &= 3 \\ \therefore (h \circ f^{-1})(3) = h(f^{-1}(3)) &= h(1) \\ h(1) = \frac{3+1}{f(1)} &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

27. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$
 $f^{-1}(b) = k$ 라고 하면, $f(k) = b$
 $\therefore k = c \quad \therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$
 또, $f^{-1}(c) = t$ 라고 하면, $f(t) = c$
 $\therefore t = d \quad \therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$

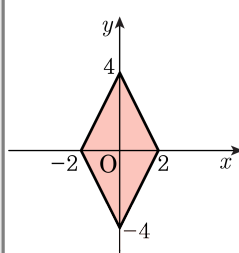
28. 함수 $2|x| + |y| = 4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$2|x| + |y| = 4$ 의 그래프는 $2x + y = 4$,
즉 $y = -2x + 4$ 의 그래프에서
 $x \geq 0, y \geq 0$ 인 부분만 남기고,
이 그래프를 x 축, y 축, 원점에 대하여 각
각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.
따라서 구하는 도형의 넓이는 $8 \times 4 \times \frac{1}{2} =$
16



29. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ 가 $x=a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9

② -9

③ $2a$

④ $2a-3$

⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x=a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \leq a \leq 2$ 이어야 한다.

$$\text{이 때, } f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$$

$$f(3) = |2| + |1| + |3-a| = 6 - a$$

$$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$$

30. $a + b \leq 100$ 이고 $\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13$ 을 만족하는 양의 정수 쌍 (a, b) 의

개수는?

- ① 1 개 ② 5 개 ③ 7 개 ④ 9 개 ⑤ 13 개

해설

$$\frac{a + b^{-1}}{a^{-1} + b} = 13$$

분모, 분자에 ab 를 곱하면

$$\frac{a^2b + a}{b + ab^2} = \frac{a(ab + 1)}{b(1 + ab)} = \frac{a}{b} = 13$$

$$\therefore a = 13b$$

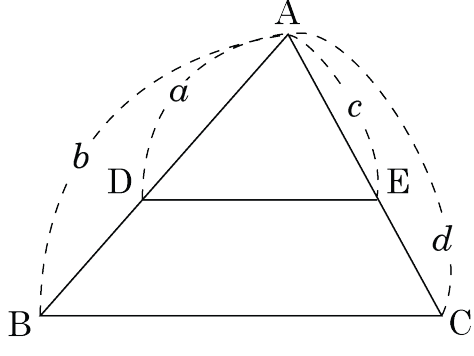
$a + b \leq 100$ 에 대입하면

$$14b \leq 100, 0 < b \leq \frac{100}{14} < 8$$

따라서 $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 이므로

(a, b) 의 개수는 7 개

31. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{AC} = d$ 일 때, 다음 중 a, b, c, d 사이의 관계로 옳지 않은 것을 모두 고르면? (단, $a \neq b, c \neq d$)



① $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{d-c}$

③ $a(d-c) = c(b-a)$

⑤ $\frac{b-a}{a} = \frac{d}{c}$

② $ac - bd = 0$

④ $\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$

해설

$a : b = c : d$ 이므로, $a : (b-a) = c : (d-a)$

32. 함수 $f(x) = [x[x]]$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

- ㉠ $f(x) = -1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다.
- ㉡ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \leq x < n+1\}$ 의 원소의 개수는 n 개이다.
- ㉢ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \leq x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이다.

- ① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x \geq 0$ 이면 $[x] \geq 0$ 이므로 $x[x] \geq 0$
 $x < 0$ 이면 $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$
그러므로 모든 x 에 대하여 $f(x) = [x[x]]$ 이므로
 $f(x) = -1$ 은 존재하지 않는다. (참)
㉡ 자연수 n 에 대하여 $n \leq x < n+1$ 이면 $[x] = n$ 이므로
 $f(x) = [nx]$
 $n^2 \leq nx < n^2 + n$ 이고 $[nx]$ 는 정수이므로
 $f(x)$ 의 원소의 개수는 $n^2, n^2 + 1, \dots, n^2 + (n-1)$ 로서
모두 n 개이다. (참)
㉢ 자연수 n 에 대하여 $-n \leq x < -n+1$ 이면 $[x] = -n$ 이므로
각 변에 $-n$ 을 곱하면, $f(x) = [-nx]$ 이고 $n^2 - n < -nx \leq n^2$
따라서 $f(x)$ 의 원소의 개수는
 $n^2 - n, (n^2 - n) + 1, \dots, (n^2 - n) + (n-1), (n^2 - n) + n$
로서 모두 $n+1$ 개 이다. (참)

33. $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ 이라 하고, $P_n = \frac{T_2}{T_2 - 1} \times \frac{T_3}{T_3 - 1} \times \cdots \times \frac{T_n}{T_n - 1}$ ($n \geq 2$)라고 할 때, P_{1991} 에 가장 근사한 값은?

- ① 2.0
- ② 2.3
- ③ 2.6
- ④ 2.9
- ⑤ 3.2

해설

$$\begin{aligned}
 T_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\
 \frac{T_n}{T_n-1} &= \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}-1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)} \\
 &= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)} \\
 P_n &= \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2} \\
 \therefore P_{1991} &= \frac{3 \cdot 1991}{1993} \approx 2.9
 \end{aligned}$$

34. $\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$ 을 만족하고, 기약분수 $\frac{17}{a}$ 이 유한소수가 되도록 하는 모든 정수 a 의 값의 합은?

① 25 ② 32 ③ 77 ④ 85 ⑤ 100

해설

$$\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1 \text{에서}$$

$$\frac{17}{34} < \frac{17}{a} < \frac{17}{17} \text{이므로}$$

$$17 < a < 34$$

이 중에서 $\frac{17}{a}$ 가 유한소수가 되게하는 정수는

$$20, 25, 32 \text{이므로}$$

$$20 + 25 + 32 = 77$$

35. 다음은 제품 p_n 을 만드는 방법과 소요 시간에 대한 설명이다. (단, $n = 2^k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$)

- 가) 제품 p_1 을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은 1이다.

나) 제품 p_1 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_2 가 한 개 만들어진다.

다) 제품 p_n 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_{2n} 이 한 개 만들어진다.

이
때 p_n 을 두 개 연결하는 데 걸리 는 시간은 $2n$ 이다. 이때, 제품 p_{16} 을 한 개 만드는데 걸리는 시간은?

- ① 32 ② 64 ③ 80 ④ 96 ⑤ 112

해설

$n = 2^k, k = 0, 1, 2, 3, \dots$ 이고 $p_1 \rightarrow 1$
 $p_2 \rightarrow p_1 p_1$ 연결 : $1 + 1 + 2 = 4$
 $p_4 \rightarrow p_2 p_2$ 연결 : $4 + 4 + 2 \times 2 = 12$
 $p_8 \rightarrow p_4 p_4$ 연결 : $12 + 12 + 2 \times 4 = 32$
 $p_{16} \rightarrow p_8 p_8$ 연결 : $32 + 32 + 2 \times 8 = 80$