1. 자연수 전체의 집합을 N 이라 할 때, N 의 임의의 원소 x 에 대하여 다음 대응 중 N 에서 N 으로의 함수인 것은?

① $x \to x - 1$

② $x \to x$ 의 양의 제곱근

③ $x \to x$ 를 4 로 나눈 나머지

④ $x \to x^2 - 1$

⑤ $x \to |-1|$

해설

① $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1 - 1 = 0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.
② $x = 2$ 일 때, $2 \in N$ 이지만 2 의 양의 제곱근 $\sqrt{2} \notin N$
따라서 함수가 아니다.
③ $x = 4$ 일 때, $4 \in N$ 이지만 4 를 4 로 나눈 나머지 $0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.
④ $x = 1$ 일 때, $1 \in N$ 이지만 $1^2 - 1 = 0 \notin N$
따라서 함수가 아니다.
⑤ 정의역의 모든 원소가 1 에 대응하므로 함수이다.

2. 양의 정수 전체의 집합 X에서 Y로의 함수 f를 다음과 같이 정의한다. $f(x)=(x$의 약수의 개수$)$ 이 때, 다음 중 $f(x)=4$인 x가 될 수 있는 것을 고르면?

① 5 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 24

해설

5 의 약수 : 1, 5 $\Rightarrow f(5)=2$
9 의 약수 :1, 3, 9 $\Rightarrow f(9)=3$
12 의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 $\Rightarrow f(12)=6$
15 의 약수 : 1, 3, 5, 15 $\Rightarrow f(15)=4$
24 의 약수 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 $\Rightarrow f(24)=8$
따라서 보기 중 $f(x)=4$인 것은 15

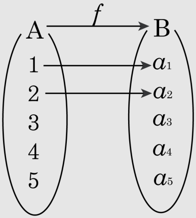
3. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개

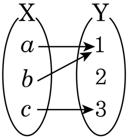
④ 81 개 ⑤ 125 개

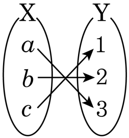
해설

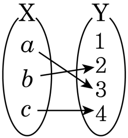
$f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$ 인 함수 $f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)

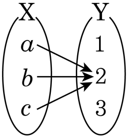


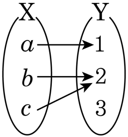
4. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ②번이다.

5. 함수 $f(x) = ax + b(a > 0)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 이 함수 $f(x)$와 같을 때, 상수 a, b의 값을 구하면?

① $a = 1,\ b = 0$ ② $a = 1,\ b = 1$ ③ $a = 2,\ b = 0$

④ $a = 2,\ b = 1$ ⑤ $a = 3,\ b = 0$

해설

$f^{-1}(x) = f(x)$에서 $f(f(x)) = x$

$$
\begin{aligned}
f(f(x)) &= af(x) + b \\
&= a(ax + b) + b \\
&= a^2x + ab + b
\end{aligned}
$$

$a^2x + ab + b = x$

$\therefore\ a^2 = 1,\ ab + b = 0$

$\therefore\ a = 1,\ b = 0$

6. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① $n(X) = n(Y)$ 이다.

② $x_1 = x_2$ 이면 $f(x_1) = f(x_2)$

③ $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.

④ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이다.

⑤ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

해설

①, ②, ③, ⑤ : 역함수를 갖기 위해서는 일대일 대응이 어야 한다.

④ : $y = x$ 에 대해 대칭관계이다.

7. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$$f(x) = \begin{cases} x + k & (x \geq 0) \\ -x + k & (x < 0) \end{cases}$$ 가 $f^{-1}(2) = -3$ 을 만족시킬 때, $f(5)$ 의

값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f^{-1}(2) = -3$ 에서 $f(-3) = 2$ 이므로

$f(-3) = 3 + k = 2$

$\therefore\ k = -1$ 이므로 $f(x) = \begin{cases} x - 1 \ (x \geq 0) \\ -x - 1 \ (x < 0) \end{cases}$

$\therefore\ f(5) = 5 - 1 = 4$

8. 함수 $f(x)=|4x+a|+b$ 는 $x=3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 $a,\ b$ 의 값에 대하여 $b-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

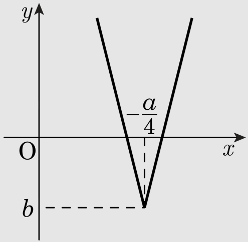
▷ 정답 : 10

해설

$f(x)=|4x+a|+b=\left|4\left(x+\frac{a}{4}\right)\right|+b$ 의 그래프는

$y=|4x|$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x=-\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4}=3,\ b=-2$

따라서 $a=-12,\ b=-2$ 이므로

$\therefore b-a=10$

9. $\dfrac{x+1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1, \quad a=-1$

$\therefore \ a=-1, \quad b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

10. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{5}{x(x+10)}$$

$a=5,\ b=10$ 이므로 $a+b=15$

11. 분수식 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{x}$

해설

(준 식) $=1-\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}}=1+\dfrac{1-x}{x}=\dfrac{1}{x}$

12. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1)=f(x-1)$이 성립할 때, $g(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

등식 $g(x+1)=f(x-1)$의 양변에
$x=-1$을 대입하면

$$\begin{aligned} g((-1)+1) = g(0) &= f((-1)-1) \\ &= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\ &= -3 \end{aligned}$$

13. 집합 $A = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 A 에서 A 로의 함수 f 가 다음과 같을 때, 항등함수가 아닌 것은?

① $f : x \rightarrow 2|x|$ ② $f : x \rightarrow x^3$ ③ $f : x \rightarrow x^5$

④ $f : x \rightarrow x$ ⑤ $f : x \rightarrow x|x|$

해설

①$f(-1) = 2,\ f(0) = 0,\ f(1) = 2$ 이므로 항등함수가 아니다.
①, ②, ③, ④$f(-1) = -1,\ f(0) = 0,\ f(1) = 1$ 이므로 모두 항등함수이다.

14. 이차함수 $f(x)=x^2-4x$ 가 있다. 함수 $f:X\to X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 를 구하면 $X=\{x\mid x\geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$k\geq 2$ 라면 $x\geq k$ 에서 $f(x)$ 는 계속 증가하므로
함수 $f:X\to X$ 가 일대일 대응이 되려면
$f(x)\geq x$

$\Rightarrow x^2-4x\geq x$

$\Rightarrow x\leq 0,\ \ x\geq 5$

$x\geq k$ 이므로 $k=5$

15. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 로의 일대일 대응 f 중 $f(1)=a,\ f(2)=b$ 인 f 의 개수는?

① 4 개 ② 6 개 ③ 8 개 ④ 12 개 ⑤ 16 개

해설

$f(1)=a,\ f(2)=b$ 이므로 $f:A\ \rightarrow\ B$ 가 일대일 대응이려면
$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2)$ 의 값을 제외한 3 개,
$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3)$ 의 값을 제외한 2 개,
$f(5)$ 의 값이 될 수 있는 것은
$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4)$ 의 값을 제외한 1 개이다.
따라서, 일대일 대응 f 의 개수는 $3\times2\times1=6$ 개

16. 함수 $f(x)=\begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x<1) \end{cases}$ 에서 $y=(f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

ⅰ) $x \geq 1$: $y=(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=2$

ⅱ) $x<1$: $y=(f \circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=2$

$\therefore\ y=(f \circ f)(x)=2$

17. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$을 만족하는 상수 a, b의 합 $4a + b$를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

18. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$

즉 $2kx + k^2 - k = 0$

모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

19. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때, $g(f(x))=x$가 되는 함수 $g(x)$는?

① $1-x$ ② $\dfrac{1}{1-x}$ ③ $\dfrac{x}{x-1}$ ④ $\dfrac{x-1}{x}$ ⑤ $\dfrac{x-1}{x+1}$

해설

$f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 일 때

$g\left(f(x)\right)=x$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$\dfrac{1}{1-x}=t$ 에서 $(1-x)t=1,\ t-xt=1$

$xt=t-1,\ \ x=\dfrac{t-1}{t}$ 이므로 $g(t)=\dfrac{t-1}{t}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{x-1}{x}$

20. 두 함수 $f(x) = 2x+3$, $g(x) = -4x-5$ 일 때, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 를 만족시키는 일차함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ g)(-2)$ 의 값은 얼마인가?

① 5 ② 3 ③ 1 ④ -3 ⑤ -5

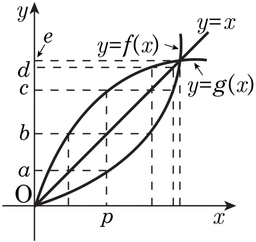
해설

$h(x) = ax + b$ 로 놓으면
$(h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(2x+3)$
$= a(2x+3) + b = 2ax + 3a + b$
그런데, $(h \circ f)(x) = g(x)$ 이므로
$2ax + 3a + b = -4x - 5$,
$2a = -4,\ 3a + b = -5$
즉, $a = -2, b = 1$ 이므로 $h(x) = -2x + 1$
$(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3) = -5$

해설

$(h \circ f)(x) = g(x)$ 에서
$h(f(x)) = g(x)$ 이고 $f(x) = 2x + 3$ 이므로
$h(2x+3) = g(x)$
또한, $(h \circ g)(-2) = h(g(-2)) = h(3)$
$h(3) = g(0) = -5$

21. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



① a　　② b　　③ c

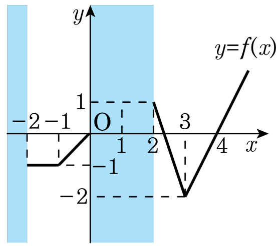
④ d　　⑤ e

해설

주어진 그림에서 $g(p)=c, f(c)=b$

$\therefore (f \circ g)(p)=f(g(p))=f(c)=b$

22. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



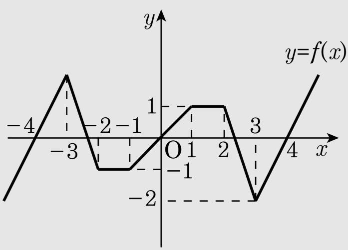
$-4 \leq x \leq -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \leq x \leq 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를
만족시키므로 주어진 함수는 기함수
즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면
다음 그림과 같으므로



$-4 \leq x \leq -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \leq x \leq 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

23. 다음 중 함수 $y = x - [x]$ (단, $-1 \le x \le 2$)의 값으로 가능한 것을 고르면? ($[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$-1 \le x < 0$ 일 때, $[x] = -1$　$\therefore y = x + 1$

$0 \le x < 1$ 일 때, $[x] = 0$　$\therefore y = x$

$1 \le x < 2$ 일 때, $[x] = 1$　$\therefore y = x - 1$

$x = 2$ 일 때, $[x] = 2$　$\therefore y = 0$

따라서, $y = x - [x]$ $(-1 \le x \le 2)$ 의 값으로 가능한 것은 ③ 뿐이다.

24. $a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}=\dfrac{43}{19}$ 을 만족하는 자연수 a, b, c, d 의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$$\frac{43}{19}=2+\frac{5}{19}=2+\cfrac{1}{\cfrac{19}{5}}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{4}{5}}$$

$$=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}$$

$\therefore\ a=2,\ b=3,\ c=1,\ d=4$

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x-2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는$a > 0$
② $-1 \leq a \leq 1$
③ $-2 < a < 2$
④ $a < -1$ 또는 $a > 1$
⑤ $a \geq 1$

해설

(i) $x \geq 2$ 일 때$f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a+1)x + 1$
(ii) $x < 2$ 일 때$f(x) = ax - (x-2) + 3 = (a-1)x + 5$
함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.
따라서, $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로
$a < -1$ 또는 $a > 1$

26. 양의 실수 전체의 집합 X 에서 X 로의 함수 $f(x)=x^2+2x, h(x)=\dfrac{3x+1}{f(x)}$ 에 대하여, $(h\circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

① 0 ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{4}{3}$

해설

$f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$

$f(a)=a^2+2a=3$

$a^2+2a-3=0, (a+3)(a-1)=0$

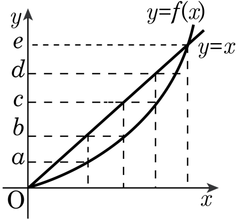
$a>0$ 이므로 $a=1$

$\therefore f^{-1}(3)=1, f(1)=3$

$\therefore (h\circ f^{-1})(3)=h(f^{-1}(3))=h(1)$

$h(1)=\dfrac{3+1}{f(1)}=\dfrac{4}{3}$

27. 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x$의 그래프이다. $(f\circ f)^{-1}(b)$의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f\circ f)^{-1}(b)=(f^{-1}\circ f^{-1})(b)=f^{-1}(f^{-1}(b))$

$f^{-1}(b)=k$라고 하면, $f(k)=b$

$\therefore\ k=c$ $\therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b))=f^{-1}(c)$

또, $f^{-1}(c)=t$라고 하면, $f(t)=c$

$\therefore\ t=d$ $\therefore\ (f\circ f)^{-1}(b)=d$

28. 함수 $2|x|+|y|=4$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

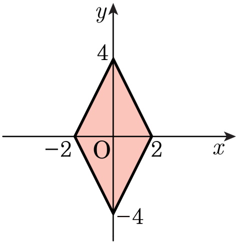
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 16

해설

$2|x|+|y|=4$ 의 그래프는 $2x+y=4$, 즉 $y=-2x+4$ 의 그래프에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 인 부분만 남기고, 이 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 각각 대칭시킨 것이므로 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 도형의 넓이는 $8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 16$



29. 함수 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$ 가 $x = a$ 에서 최솟값을 가질 때, $f(0) + f(3)$ 의 값은?

① 9 ② -9 ③ $2a$

④ $2a-3$ ⑤ $-2a+3$

해설

절댓값 기호가 홀수 개 있을 때, 절댓값 기호 안의 값이 0 이 되게 하는 x 의 값 중 가운데 값에서 최솟값을 가지므로 $x = a$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 가지려면 $1 \le a \le 2$ 이어야 한다.

이 때, $f(0) = |-1| + |-2| + |-a| = 3 + a$

$f(3) = |2| + |1| + |3-a| = 6 - a$

$\therefore f(0) + f(3) = 3 + a + 6 - a = 9$

30. $a+b \le 100$ 이고 $\dfrac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=13$ 을 만족하는 양의 정수 쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는?

① 1 개 ② 5 개 ③ 7 개 ④ 9 개 ⑤ 13 개

해설

$$\frac{a+b^{-1}}{a^{-1}+b}=13$$

분모, 분자에 ab 를 곱하면

$$\frac{a^2b+a}{b+ab^2}=\frac{a(ab+1)}{b(1+ab)}=\frac{a}{b}=13$$

$\therefore\ a=13b$

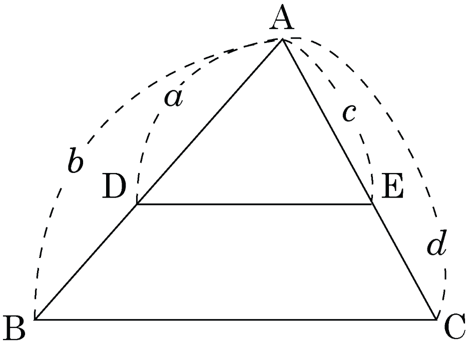
$a+b \le 100$ 에 대입하면

$14b \le 100,\ 0<b \le \dfrac{100}{14}<8$

따라서 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ 이므로

$(a,\ b)$ 의 개수는 7 개

31. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} // \overline{BC}$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{AC} = d$일 때, 다음 중 a, b, c, d사이의 관계로 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (단, $a \neq b$, $c \neq d$)



① $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b-a}{d-c}$

② $ac - bd = 0$

③ $a(d-c) = c(b-a)$

④ $\dfrac{b-a}{a} = \dfrac{d-c}{c}$

⑤ $\dfrac{b-a}{a} = \dfrac{d}{c}$

해설

$a : b = c : d$이므로, $a : (b-a) = c : (d-a)$

32. 함수 $f(x) = [x[x]]$ 에 대한 보기의 설명 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

보기

㉠ $f(x) = -1$ 이 되는 x 는 존재하지 않는다.

㉡ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \le x < n+1\}$ 의 원소의 개수는n 개이다.

㉢ 자연수 n 에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \le x < -n+1\}$ 의 원소의 개수는 $n+1$ 개이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ $x \ge 0$ 이면 $[x] \ge 0$ 이므로 $x[x] \ge 0$

$x < 0$ 이면 $[x] < 0$ 이므로 $x[x] > 0$

그러므로 모든 x 에 대하여 $f(x) = [x[x]]$ 이므로

$f(x) = -1$ 은 존재하지 않는다. (참)

㉡ 자연수 n 에 대하여 $n \le x < n+1$ 이면 $[x] = n$ 이므로

$f(x) = [nx]$

$n^2 \le nx < n^2 + n$ 이고 $[nx]$ 는 정수이므로

$f(x)$ 의 원소의 개수는 $n^2,\ n^2+1,\ \cdots,\ n^2+(n-1)$ 로서

모두 n 개이다. (참)

㉢ 자연수 n 에 대하여 $-n \le x < n+1$ 이면 $[x] = -n$ 이므로

각 변에 $-n$ 을 곱하면, $f(x) = [-nx]$ 이고 $n^2 - n < -nx \le n^2$

따라서 $f(x)$ 의 원소의 개수는

$n^2 - n, (n^2-n)+1, \cdots, (n^2-n)+(n-1), (n^2-n)+n$

로서 모두 $n+1$ 개 이다. (참)

33. $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$이라 하고, $P_n = \dfrac{T_2}{T_2 - 1} \times \dfrac{T_3}{T_3 - 1} \times \cdots \times \dfrac{T_n}{T_n - 1}$ $(n \geq 2)$라고 할 때, P_{1991}에 가장 근사한 값은?

① 2.0　　② 2.3　　③ 2.6　　④ 2.9　　⑤ 3.2

해설

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\frac{T_n}{T_n - 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2} - 1} = \frac{(n+1)n}{(n+2)(n-1)}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n-1)} \cdot \frac{n}{(n+2)}$$

$$P_n = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 4} \times \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 5} \times \cdots \times \frac{(n+1) \cdot n}{(n-1)(n+2)} = \frac{3n}{n+2}$$

$$\therefore P_{1991} = \frac{3 \cdot 1991}{1993} \fallingdotseq 2.9$$

34. $\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$을 만족하고, 기약분수 $\frac{17}{a}$이 유한소수가 되도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?

① 25 ② 32 ③ 77 ④ 85 ⑤ 100

해설

$\frac{1}{2} < \frac{17}{a} < 1$에서

$\frac{17}{34} < \frac{17}{a} < \frac{17}{17}$이므로

$17 < a < 34$

이 중에서 $\frac{17}{a}$가 유한소수가 되게하는 정수는

20, 25, 32이므로

$20 + 25 + 32 = 77$

35. 다음은 제품 p_n 을 만드는 방법과 소요 시간에 대한 설명이다. (단, $n = 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$)

가) 제품 p_1 을 한 개 만드는 데 걸리는 시간은 1이다.
나) 제품 p_1 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_2 가 한 개 만들어진다.
다) 제품 p_n 을 차례대로 두 개 만든 다음에 이를 연결하면 제품 p_{2n} 이 한 개 만들어진다.

이때 p_n 을 두 개 연결하는 데 걸리 는 시간은 $2n$ 이다. 이때, 제품 p_{16} 을 한 개 만드는데 걸리는 시간은?

① 32 ② 64 ③ 80 ④ 96 ⑤ 112

해설

$n = 2^k$, $k = 0, 1, 2, 3, \cdots$ 이고 $p_1 \ \rightarrow \ 1$

$p_2 \ \rightarrow \ p_1 p_1$ 연결 : $1 + 1 + 2 = 4$

$p_4 \ \rightarrow \ p_2 p_2$ 연결 : $4 + 4 + 2 \times 2 = 12$

$p_8 \ \rightarrow \ p_4 p_4$ 연결 : $12 + 12 + 2 \times 4 = 32$

$p_{16} \ \rightarrow \ p_8 p_8$ 연결 : $32 + 32 + 2 \times 8 = 80$