1. 다음 중 공집합인 것은?

① $\{x|x$는 분모가 7인 기약분수$\}$

② $\{x|x$는 9의 배수 중 짝수$\}$

③ $\{x|x$는 11 미만의 홀수$\}$

④ $\{x|x$는 $1 < x \leq 2$인 자연수$\}$

⑤ $\{x|x$는 1보다 작은 자연수$\}$

해설

① $\left\{\frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \cdots\right\}$

② $\{18,\ 36,\ 54,\ \cdots\}$

③ $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

④ $\{2\}$

2. '아름다운 대한민국' 이라는 문장 속에서 자음의 집합을 A , 모음의 집합을 B 라고 할 때, $n(A)-n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$A=\{$ㅇ , ㄹ , ㅁ , ㄷ , ㄴ , ㅎ , ㄱ$\}$ 이므로 $n(A)=7$
$B=\{$ㅏ , ㅡ , ㅜ , ㅐ , ㅣ$\}$ 이므로 $n(B)=5$
따라서 $n(A)-n(B)=7-5=2$ 이다.

3. 두 집합 $C = \{x \mid x\text{는 } 12\text{의 약수}\}$, $D = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 일 때, $D - C$ 를 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $\{6,\ 12\}$

해설

$C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$, $D \cap C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$D - C = D - (D \cap C) = \{6,\ 12\}$

4. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{3, 4\}$ 일 때, $A^c \cap B^c$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{2\}$

해설

$A^c = \{2,\ 4\},\ B^c = \{1,\ 2,\ 5\},\ A^c \cap B^c = \{2\}$

5. 2560 의 양의 약수의 개수는?

① 9 ② 16 ③ 20 ④ 22 ⑤ 27

해설

$2560 = 2^9 \times 5$ 이므로 양의 약수의 개수는
$(9+1) \times (1+1) = 20$

6. 다음 중 집합 $A-(B-C)$ 와 같은 집합은?

① $(A-B)-(A-C)$

② $(A-B)\cup(A\cap C)$

③ $(A-B)-C$

④ $(A\cap B)-C$

⑤ $A-(B\cup C)$

해설

$$
\begin{aligned}
A-(B-C) &= A-(B\cap C^c) \\
&= A\cap(B\cap C^c)^c = A\cap(B^c\cup C) \\
&= (A\cap B^c)\cup(A\cap C) \\
&= (A-B)\cup(A\cap C)
\end{aligned}
$$

7. 유리함수 $f(x) = \dfrac{ax}{3x+2}$ 와 그 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 서로 같을 때, 상수 a 의 값은?

① 3 ② 2 ③ 1 ④ -1 ⑤ -2

해설

역함수의 식은 $x = \dfrac{ay}{3y+2}$

$3xy + 2x = ay$

$\therefore y = \dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{-2x}{3x-a}$

모든 실수 x 에 대하여

$f(x) = f^{-1}(x)$ 이므로

$\dfrac{ax}{3x+2} = \dfrac{-2x}{3x-a}$

$\therefore a = -2$

8. 좌표평면에서 무리함수 $y=-\sqrt{-x+2}+1$의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?

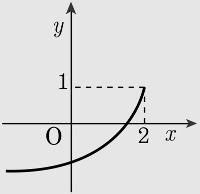
① 제 1사분면 ② 제 2사분면

③ 제 3사분면 ④ 제 1사분면, 제 2사분면

⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은 제 2사분면이다.

9. $f : (x, y) \to (x-2, y+1)$, $g : (x, y) \to (-x, -y)$일 때, 곡선 $y = \sqrt{-x+2}+1$이 $g \circ f$에 의하여 변환된 곡선의 방정식은?

① $y = \sqrt{x-2}-1$

② $y = \sqrt{-x-4}+2$

③ $y = -\sqrt{x}-2$

④ $y = -\sqrt{x}+2$

⑤ $y = -\sqrt{x-2}$

해설

$y = \sqrt{-x+2}+1$ 은 f 에 의하여

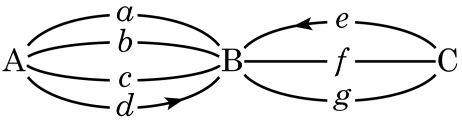
$y-1 = \sqrt{-(x+2)+2}+1$

$\therefore y = \sqrt{-x}+2$

다시 g에 의하여 $-y = \sqrt{-(-x)}+2$

$\therefore y = -\sqrt{x}-2$

10. 다음 그림과 같은 도로망에서 도로 d 와 e 는 화살표 방향으로 일방 통행만 되고 그 외의 도로는 양쪽 방향으로 통행이 된다고 할 때, A 지점에서 출발하여 B 지점을 거쳐 C 지점까지 갔다가 다시 B 지점을 거쳐 A 지점까지 되돌아 오는 길의 가지수는?



① 12 개 ② 36 개 ③ 64 개

④ 72 개 ⑤ 144 개

해설

$A \to B,\ B \to C,\ C \to B,\ B \to A$ 의 길의 가지수는 각각 $4, 2, 3, 3$ 이므로 구하는 길의 가지수는 $4 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$ (개) 이다.

11. ${}_nC_4 = {}_nC_6$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 10$

해설

$n = 4 + 6 = 10$

12. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라의 7가지 색 중에서 4가지를 뽑아 그림을 색칠하려고 한다. 초록은 제외하고 노랑은 포함하여 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______가지

▷ **정답 :** 10가지

해설

부분집합에서 집합의 개수를 구할 때처럼 초록과 노랑을 제외한 5개의 색 중에 3개를 뽑는 경우이므로 ${}_5C_3 = 10$

13. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라의 7가지 색 중에서 4가지를 뽑아 그림을 색칠하려고 한다. 빨강을 포함하여 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 가지

▷ 정답 : 20 가지

해설

$_{6}C_{3} = 20$

14. 크기가 서로 다른 오렌지 10 개 중에서 3 개를 선택할 때, 크기가 가장 큰 오렌지 1 개가 반드시 포함되는 경우의 수는?

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

해설

오렌지 9 개 중 2 개를 뽑는 경우의 수와 같다.

$\therefore\ {}_9C_2 = 36$

15. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 $(A \cap B^c) \cup (B - A^c)$ 과 같은 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$$\begin{aligned}(A \cap B^c) \cup (B - A^c) &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A) \\ &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U = A\end{aligned}$$

16. 다음 <보기> 중 서로 같은 함수끼리 짝지어진 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $f(x) = x - 2,\ g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

ㄴ $f(x) = |x|,\ g(x) = \sqrt{x^2}$

ㄷ 정의역이 $X = \{-1,\ 1,\ 2\}$ 일 때,
$f(x) = x^3,\ g(x) = 2x^2 + x - 2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄱ는 $x = 2$ 에서 다른 함수이나
ㄴ, ㄷ는 주어진 모든 정의역에서 같은 함수이다.

17. 어떤 등산모임에서는 다음과 같이 강원도, 충청도, 전라도 세 지역의 6개의 산을 6주에 걸쳐 주말마다 하나씩 등산할 계획을 세우고 있다.

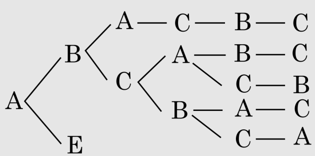
지역	산
강원도	설악산, 오대산
충청도	계룡산, 소백산
전라도	내장산, 지리산

같은 지역의 산끼리 연속적으로 등산하지 않도록 계획을 세우는 방법은 모두 몇 가지인가?

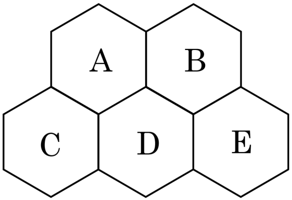
① 36　　② 48　　③ 60　　④ 120　　⑤ 240

해설

세 지역 강원도, 충청도, 전라도를 각각 A, B, C 라 하면 1주차에 A 지역 산을 등산하고, 2주차에 B 지역 산을 등산하는 경우는 다음 수형도와 같이 5가지가 있고, 같은 지역의 산끼리 위치를 바꾸는 방법은 $2\times2\times2=8$ (가지)
한편, 1주차에 A 지역, 2주차에 C 지역의 산을 등산하는 경우도 같으므로 1주차에 A 지역의 산을 등산하는 방법의 수는 $5\times8\times2=80$ (가지)
또한, 1주차에 B, C 지역의 산을 등산하는 경우의 수도 같다.
따라서 구하는 방법의 수는
$80\times3=240$ (가지)



18. 다음 그림의 A, B, C, D, E 에 다섯 가지의 색을 칠하여 그 경계를 구분하는 방법의 수는? (단, 같은 색을 여러 번 사용할 수 있다.)



① 530　② 540　③ 550　④ 560　⑤ 570

해설

주어진 그림에서 D 는 A, B, C, E 와 모두 접하므로 D 에 칠한 색은 다른 곳에 칠하면 안 된다.
따라서 $D \to C \to A \to B \to E$ 의 순서로 색을 칠한다고 하면 D 는 5 가지, C 는 4 가지, A 는 3 가지, B 는 3 가지, E 는 3 가지의 색을 칠할 수 있으므로 구하는 방법의 수는
$5 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$ (가지)

19. $0 < r \le n$을 만족하는 두 자연수 n, r에 대하여 원소의 개수가 n인 집합 S의 부분집합 중에서 원소의 개수가 r인 집합의 개수는 ${}_nC_r$이다. 이를 이용하여 ${}_nC_r$에 대한 어떤 성질을 다음과 같이 설명하였다.

> 집합 S의 특정한 원소 a를 제외한 집합 $S-\{a\}$를 생각하고, S의 부분집합 중에서 원소의 개수가 r인 집합 중의 하나를 T라 하면
> (i) $a \in T$를 만족하는 집합 T의 개수는 (가)이다.
> (ii) $a \notin T$를 만족하는 집합 T의 개수는 (나)이다.
> 이 때, 집합 T는 $a \in T$와 $a \notin T$의 둘 중에서 반드시 하나를 만족하고, 동시에 만족하지는 않으므로 ${}_nC_r =$ (다)

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① ${}_{n-1}C_{r-1}$, ${}_{n-1}C_r$, ${}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

② ${}_{n-1}C_r$, ${}_{n-1}C_{r-1}$, ${}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$

③ ${}_{n-1}C_{r-1}$, ${}_{n-1}C_r$, ${}_{n-1}C_{r-1} \times {}_{n-1}C_r$

④ ${}_{n-1}C_r$, ${}_{n-1}C_{r-1}$, ${}_nC_{r-1} \times {}_{n-1}C_{r-1}$

⑤ ${}_nC_{r-1}$, ${}_{n-1}C_{r-1}$, ${}_nC_{r-1} \times {}_{n-1}C_{r-1}$

해설

집합 S의 특정한 원소 a를 제외한 집합 $S-\{a\}$를 생각하고, S의 부분집합 중에서 원소의 개수가 r개인 집합 중의 하나를 T라 하자.

(i) $a \in T$를 만족하는 집합 T의 개수는 S의 원소 중에서 a를 제외한 나머지 $(n-1)$개 중에서 $(r-1)$개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{n-1}C_{r-1}$이다.

(ii) $a \notin T$를 만족하는 집합 T의 개수는 S의 원소 중에서 a를 제외한 나머지 $(n-1)$개 중에서 r개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_{n-1}C_r$이다.

이 때, 집합 T는 $a \in T$와 $a \notin T$의 둘 중에서 반드시 하나를 만족하고, 동시에 만족하지는 않으므로 합의 법칙에 의하여

${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$

20. 다음 그림과 같은 6 개의 빈칸에 2 ,2^2 ,2^3 ,2^4 ,2^5 ,2^6 의 6 개의 수를 하나씩 써넣으려고 한다. 1 열, 2 열, 3 열의 숫자들의 합을 각각 a_1, a_2, a_3 라 할 때, $a_1 < a_2 < a_3$ 이 되도록 빈 칸을 채우는 경우의 수는?

① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 210

해설

2 ,2^2 ,2^3 ,2^4 ,2^5 ,2^6 중 어느 두 수의 합도 서로 다르다.
따라서, 구하는 경우의 수는 6 개에서 2 개, 2 개,2 개의 3 개 조를 만든 다음 2 개의 수의 자리를 바꾸게 되므로

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \times 2^3 = 120$$

21. 집합 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 의 부분집합 중에서 k 개의 홀수를 원소로 갖는 집합의 개수를 a_k 라고 할 때, $a_1+a_2+a_3$ 의 값은?

① 35 ② 39 ③ 44 ④ 56 ⑤ 59

해설

(i) 1개의 홀수를 원소로 가질 때
1을 원소로 가지고 3, 5를 원소로 갖지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-1-2}=2^3=8$
3 또는 5만 원소로 갖는 부분집합의 개수도 마찬가지 방법으로 각각 8이다.
$\therefore a_1=8\times 3=24$

(ii) 2개의 홀수를 원소로 가질 때
1, 3을 원소로 가지고, 5를 원소로 가지지 않는 부분집합의 개수는 $2^{6-2-1}=2^3=8$(개)
1, 5 또는 3, 5만 원소로 가지는 부분집합의 개수도 마찬가지 방법으로 각각 8이다.
$\therefore a_2=8\times 3=24$

(iii) 3개의 홀수를 원소로 가질 때
1, 3, 5를 원소로 가지는 부분집합의 개수는 $2^{6-3}=2^3=8$
$\therefore a_3=8$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3=56$

22. 두 집합 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{2,3\}$ 에 대하여 $A\cap X=X$, $(A\cap B)\cup X=X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

집합 X 는 원소 2, 3 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$\therefore\ n(X)=2^{5-2}=2^3=8$ (개)

23. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A^c \cap B^c = \{1,\ 7\}$, $A^c \cap B = \{4, 6\}$ 일 때 집합 A 를 원소나열법으로 나타내면?

① $\{2,\ 3,\ 5\}$　② $\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$　③ $\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

④ $\{2,\ 3,\ 6\}$　⑤ $\{2,\ 3,\ 7\}$

해설

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$,

$A^c \cap B^c = \{1,\ 7\} = (A \cup B)^c$ 에서 $A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

$A^c \cap B = \{4, 6\} = B \cap A^c = B - A$ 에서 B 에만 속하는 원소가 4, 6이므로

집합 A 의 원소는 2, 3, 5 이고 따라서 $A = \{2,\ 3,\ 5\}$ 이다.

24. 세 집합 A, B, T에 대하여 $T=(A\cup B)-(A\cap B)$가 성립할 때, 다음 중 참인 명제는?

① A가 무한집합이면 T도 무한집합이다.

② B가 유한집합이면 T는 무한집합이다.

③ $A\cap B$가 유한집합이면 T는 무한집합이다.

④ $A\cup B$가 유한집합이면 T도 유한집합이다.

⑤ T가 유한집합이면 A, B모두 무한집합이다.

해설

$T=(A\cup B)-(A\cap B)$에서 $T\subset(A\cup B)$이므로 ④는 항상 성립한다.
(①, ②, ③, ⑤ 의 반례 : $A=B$ 일 때)

25. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(3g(x)+4x+6)=x$ 가 성립한다. 이 때, $f(3)+g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

$f(3g(x)+4x+6)=x$ 에서

$f^{-1}(x)=3g(x)+4x+6$

이때, $f^{-1}(x)=g(x)$ 이므로

$g(x)=3g(x)+4x+6$

$\therefore g(x)=-2x-3$

한 편, $y=g(x)$ 로 놓고 $y=-2x-3$ 을

x 에 대하여 정리하면 $2x=-y-3$ 에서

$x=-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}$

여기서 x, y 를 서로 바꾸면

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$\therefore f(x)=g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

$\therefore f(3)+g(3)=-3-9=-12$